

# Curso de Hidráulica General

(Continuación)

Cualquiera rotación horizontal normal a la fuerza, no da trabajo, y por lo tanto acusa indiferencia del equilibrio para ella. Una traslación vertical ascendente disminuye la subpresión y genera la reacción correspondiente que vuelve a sumergir el cuerpo a la posición de equilibrio. Una traslación vertical descendente, al aumentar la subpresión, tiende también a restablecer el equilibrio.

Una rotación virtual de eje vertical, no hace tampoco trabajar las fuerzas. Queda por examinar el caso de rotaciones de ejes horizontales. Nos limitaremos a considerar rotaciones que no sacan al centro de carena del plano de simetría que lo contiene.

En la figura 11 hemos dibujado el sólido flotante en su rotación virtual elemental  $d\alpha$ . Para el estudio elegiremos una rotación que no altere el volumen de la carena. Los planos de trazas  $AB$  y  $ED$  son las flotaciones anterior y posterior a la rotación, llamando *flotación* a la prolongación del plano de la superficie libre dentro del sólido.

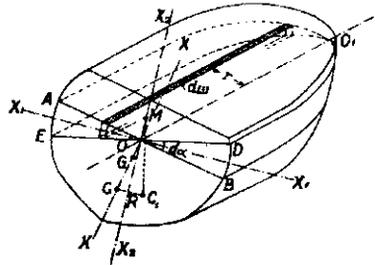


Fig. 11

Observando la figura, se ve que por efecto de la rotación en torno del eje  $OO_1$  el centro de carena  $C$  se ha trasladado a  $C_2$  y que se ha generado un par compuesto de la subpresión vertical ascendente aplicada en  $C_2$  y el peso aplicado en  $G$ . Vemos además que si la vertical elevada desde  $C_2$  corta al eje de simetría  $XX'$  más arriba que  $G$ , en un punto  $M$ , este par tiende a restablecer la posición de equilibrio. Lo contrario ocurre si  $M$  está entre  $C$  y  $G$ . Por lo tanto, la condición de equilibrio estable es que la distancia  $CM$  sea mayor que la distancia  $CG$ .

El punto  $M$  cuya ubicación es decisiva para la estabilidad del equilibrio se llama *metacentro*.

Se reduce pues el problema a encontrar la distancia metacéntrica  $CM$ .

Primero debemos notar que si consideramos los husos de trazas  $AOE$  y  $ODB$  (iguales por hipótesis), como constituídos por los prismas elementales engendrados

por la rotación, de base  $d\omega$ , y de altura  $r d\alpha$ , el integral desde un extremo a otro a de ser nulo:

$$d\alpha \int_0^{\Omega} r d\omega = 0$$

Como  $d\alpha$  no es cero, por hipótesis, el otro factor debe serlo. Luego, el momento estático de la superficie de flotación, es nulo. Por lo tanto, el eje  $OO_1$  pasa por el centro de gravedad de ella.

Tomemos momentos de los volúmenes de carena respecto a la traza del plano bisector de los husos, en el plano de simetría, traza que pasa por el centro de gravedad de ellos. El momento de los volúmenes podemos descomponerlo en dos sumandos: momento de la parte común, inferior a la línea  $EOB$  y momento de los husos de sección  $ACE$ , de la carena antes de la rotación y  $DOB$  de la posterior a ella.

Como el momento de cada huso respecto a ese eje es nulo, por ser el eje  $X_1 X_1$  bisector, se sigue que ambas carenas dan momentos iguales con respecto a ese eje. De aquí se deduce que los centros de carena  $C$  y  $C_1$  están sobre una recta paralela al eje  $X_1 X_1$ .

La diferencia de los momentos de los volúmenes de carena respecto al eje  $X_2 X_2$ , perpendicular al bisector y situado también en el plano de simetría, es  $V \times CC_1$ , llamando  $V$  el volumen de la carena (pues el momento de la carena primitiva es  $V \times CR$ ; el de la segunda es  $V \times C_1 R$ , de signo contrario al anterior). Las distancias  $CR$  y  $C_1 R$  son normales al eje  $X_2 X_2$ , como se desprende del paralelismo de  $CC_1$  con  $X_1 X_1$ .

Esa diferencia de momentos debe ser debida a los husos, parte no común de los volúmenes de la carena, ella vale:

$$d\alpha \int_0^{\Omega} r^2 d\alpha$$

El integral es el momento de inercia de la superficie de flotación respecto al eje  $OO_1$ , que pasa por su centro de gravedad. La diferencia de los momentos se puede escribir:

$$V \times CC_1 = I d\alpha$$

Notando que  $d\alpha$  es igual a  $\frac{CC_1}{CM}$  se tiene finalmente que:

$$CM = \frac{I}{V} \quad (9)$$

La distancia entre el centro de carena y el metacentro es por consiguiente igual a la razón entre el momento de inercia de la superficie de flotación y el vo-

lumen de la carena. Para que el equilibrio sea estable ha de ser mayor que la distancia entre el centro de carena y el centro de gravedad.

EJEMPLOS.—1.º Se puede averiguar el peso específico que debe tener una viga cuadrada de madera, considerada homogénea, para que flote con un lado o con una diagonal horizontal.

2.º Aquí nos contentaremos con averiguar qué proporción debe haber entre el diámetro de la base y la altura de un cilindro homogéneo que pesa  $500 \text{ Kg/m}^3$  para que flote con su eje vertical.

La parte sumergida es la mitad del volumen del cilindro.

Si llamamos  $x$  a la razón que buscamos ( $x = D:h$ ), obtendremos  $D = xh$  y por lo tanto, el volumen de la carena será:

$$V = \frac{\pi D^2 h}{4 \times 2} = \frac{\pi x^2 h^3}{8}$$

El momento de inercia de la flotación, que es igual al que dan las bases del cilindro, respecto a un diámetro, vale:

$$I = \frac{\pi D^4}{64} = \frac{\pi x^4 h^4}{64}$$

La distancia  $CM$  es:

$$CM = \frac{I}{V} = \frac{\pi x^4 h^4}{\pi 64 x^2 h^4} \frac{8}{x^2 h} = \frac{I}{8} x^2 h$$

La distancia entre el centro de carena y el centro de gravedad es  $\frac{1}{4} h$ , por consiguiente, se tiene:

$$\frac{h x^2}{8} \geq \frac{h}{4}$$

$$x^2 \geq 2 \qquad x \geq \pm 1,41$$

La raíz negativa no tiene significado, y por lo tanto podemos decir que es posible la flotación de un cilindro homogéneo que pesa  $500 \text{ Kg/m}^3$ , con su eje vertical si el diámetro de la base es mayor de 1,41 veces la altura.

En el Laboratorio de Hidráulica se pueden experimentar los principios de Pascal y Arquímedes, las presiones totales y las condiciones de equilibrio de cuerpos flotantes.

Salvo el caso de fenómenos capilares, de los cuales se puede prescindir en la práctica del ingeniero, puede decirse que la Hidrostática está perfectamente comprobada por la experimentación.

## CAPITULO III

### Nociones fundamentales de Hidráulica

13. Ecuaciones fundamentales.—14. Clasificación de los escurrimientos.—15. Movimiento permanente del líquido perfecto.—Teorema de Bernoulli.—16. Corrientes líquidas, gasto.—17. Extensión de la suma de Bernoulli a toda la corriente. Ejemplo.—18. Variación de la suma de Bernoulli en corrientes abiertas. Escorrimento crítico. Velocidad de propagación de las oncas.—19. Cálculo de la profundidad crítica y del Bernoulli crítico. Ejemplos y aplicaciones.—20. Potencia hidráulica.—21. Pérdidas de carga.

**13. Ecuaciones fundamentales.**—Para establecer las ecuaciones generales del movimiento de cada partícula líquida, en función de las fuerzas exteriores que la solicitan, tomando en cuenta las ligazones que provienen de la forma de la canalización y de las demás condiciones del escurrimiento, se puede recurrir, como se hace en la Dinámica del sólido, a escribir la ecuación itineraria de cada molécula, es decir, las relaciones que dan las coordenadas actuales en función de las fuerzas solicitantes y de las coordenadas iniciales. Estas ecuaciones que constituyen el sistema de Lagrange, derivadas respecto al tiempo, darían la velocidad de las partículas. Si en vez de seguir este camino ordinario, se considera el régimen de movimiento de la partícula, o sea, si estudiamos en cada punto fijo del espacio las velocidades con que va pasando el fluido en cada instante, velocidades que dependen de las fuerzas solicitantes y del tiempo, obtendremos relaciones en que aparecerán las proyecciones de las velocidades sobre ejes coordenados en función de las fuerzas solicitantes y de dicho tiempo. Este último es *el sistema de Euler*: es el útil en Hidráulica. Se establecerán las ecuaciones de Euler en líquidos perfectos y podrán ser usadas en líquidos naturales, con frotamientos, agregándoles términos correctivos.

Consideremos, pues, siguiendo a Euler, un fluido perfecto que se mueve bajo la acción de fuerzas exteriores proporcionales a la masa de él, y un punto fijo en el espacio dentro de la masa líquida. Se elige un sistema de ejes coordenados ortogonales en el que  $x, y, z$ , son las coordenadas del punto considerado;  $u, v, w$ , las proyecciones sobre los ejes de la velocidad que posee una partícula al pasar por el punto fijo considerado, en el instante  $t$ ;  $X, Y, Z$ , las proyecciones de la aceleración resultante de las fuerzas exteriores, o sea, las proyecciones sobre los ejes, de las fuerzas que obran sobre la unidad de masa del fluido;  $p$ , la presión en el punto en el instante  $t$ , que es independiente de la orientación del plano sobre el cual se considere actuando, pues el líquido es perfecto, y  $\rho$  la masa específica, que es constante en los líquidos incompresibles, pero que en general es también función de las coordenadas del punto y del tiempo.

Las componentes  $u, v, w$  de la velocidad varían en  $du, dv, dw$ , en el tiempo  $dt$ , siendo  $du, dv, dw$ , los diferenciales totales de la velocidad respecto a las cuatro variables  $x, y, z, t$ . La variación de la velocidad se expresa, pues, referente al eje de las  $X$ .

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

La aceleración efectiva de la partícula a su paso por el punto fijo es esta variación por unidad de tiempo, o sea:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}$$

Consideremos ahora la partícula elemental flúida. móvil, con la forma de un paralelepípedo rectangular, cuyas aristas están orientadas según los ejes y miden  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (fig. 12). Sobre ella obran las fuerzas exteriores, cuya aceleración resultante se proyecta, como se dijo, en  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  y las presiones en sus caras.

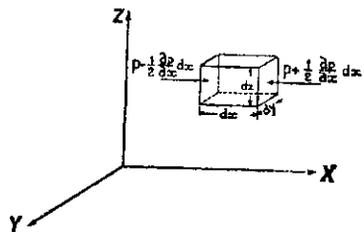


Fig. 12

Podemos escribir la ecuación dinámica respecto al eje de la  $X$ , notando que si  $p$  es la presión en el centro de gravedad del paralelepípedo, en las caras antagónicas de magnitud  $dy$ ,  $dz$ , esa presión es:

$$p - \frac{l}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad \text{y} \quad p + \frac{l}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx$$

y las presiones totales sobre dichas caras serán el producto de estas presiones unitarias por la magnitud  $dy dz$  del área. Las fuerzas exteriores dan por resultante, respecto al eje de las  $X$ , el producto de la masa  $\rho dx dy dz$  por  $X$ , que es la proyección de la aceleración resultante de ella sobre dicho eje. Se tiene, pues, la ecuación:

$$\rho dx dy dz \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \left( p - \frac{l}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz - \left( p + \frac{l}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy dz + \rho dx dy dz X$$

Simplificada y dividida  $\rho$ , esta ecuación, y las otras dos análogas respecto al eje de las  $Y$  y de las  $Z$ , quedan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= X - \frac{l}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= Y - \frac{l}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= Z - \frac{l}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (1)$$

que son las ecuaciones de la Hidrodinámica debidas a Euler.

Si en estas ecuaciones suponemos nulas las velocidades, sus derivadas también lo serán. Se obtienen así las ecuaciones generales de la Hidrostática. Se podría decir a la inversa, que las ecuaciones de la Hidrodinámica pueden obtenerse de las de la Hidrostática agregando a las fuerzas exteriores que figuran en ellas las fuerzas de inercia por unidad de masa, de acuerdo con el principio de D'Alembert.

Los líquidos perfectos son incompresibles: la densidad es constante en ellos. Si se conocen además todas las fuerzas exteriores, las ecuaciones (1), dan tres relaciones entre las cuatro funciones  $u, v, w, p$ , de las variables independientes  $x, y, z, t$ . Es necesario, pues, establecer una cuarta relación para dejar determinado el sistema. Esta relación se obtiene de la condición de incompresibilidad del líquido o de la invariabilidad del volumen, llamada *ecuación de continuidad*.

Supongamos un paralelepípedo recto fijo en el espacio, cuyas aristas elementales sean  $dx, dy, dz$ . En el centro de gravedad de él, de coordenadas  $x, y, z$ , la velocidad tiene de proyecciones  $u, v, w$ . Por este paralelepípedo ideal pasa el líquido. En la cara anterior de magnitud  $dy dz$ , en el instante  $t$ , la velocidad se proyecta en

$$u - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} dx$$

y entra en consecuencia un volumen

$$\left(u - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy dz$$

sale por la cara posterior, de igual magnitud, un volumen

$$\left(u + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy dz$$

La diferencia con el que entró es:

$$\left(u - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy dz - \left(u + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dy dz = - \frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz$$

Análogamente por las otras caras, la diferencia entre el volumen que entra y sale en el instante  $t$  es:

$$- \frac{\partial v}{\partial y} dy dz dx$$

$$- \frac{\partial w}{\partial z} dz dy dx$$

Como no pudo quedarse nada dentro del paralelepípedo, pues el líquido es incompresible, se tiene:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} dx dy dz - \frac{\partial v}{\partial y} dy dz dx - \frac{\partial w}{\partial z} dz dy dx = 0$$

o sea, simplemente:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad 2)$$

Con esta ecuación queda determinado el sistema de ecuaciones de la Hidrodinámica del líquido perfecto.

**14. Clasificación de los escurrimientos.**—Antes de proceder a la integración de las ecuaciones fundamentales en la forma restringida en que sólo podemos hacerlo, es necesario conocer las clases de movimientos líquidos que vamos a estudiar y la nomenclatura que se usa comunmente.

La forma más interesante de escurrimiento líquido es la de *corriente*, que definiremos como un haz de trayectorias o *filetes líquidos* rectos y paralelos, o de pequeña curvatura y lenta convergencia o divergencia. Las corrientes pueden ser *impermanentes* y *permanentes* según que en cada punto del espacio varíen o no las circunstancias del escurrimiento, que son la velocidad, la presión, etc. Las corrientes permanentes o independientes del tiempo en cada punto, se caracterizan por la invariabilidad de la *sección normal* o corte plano perpendicular a los filetes o dirección de la velocidad de las partículas. La *sección normal* puede, sin embargo, ser lentamente variable a lo largo del camino de la corriente. Si además de no variar una sección, son iguales a ella las sucesivas a lo largo del camino, el movimiento de las partículas es uniforme, y en este caso se tienen las *corrientes uniformes*. Si a la invariabilidad de cada sección corresponde una lenta convergencia o divergencia general de la corriente, es decir, si las secciones sucesivas van aumentando o disminuyendo, se tienen las *corrientes permanentes gradualmente variadas*. En éstas las velocidades reciben continuamente aceleraciones positivas o negativas.

Se llaman *corrientes abiertas*, o *en contorno abierto*, aquellas que tienen parte de la sección normal en contacto con la atmósfera, tales son los canales. *Cerradas* o *en contorno cerrado* aquellas cuyo perímetro está totalmente rodeado por paredes, tal es una cañería.

Algunos autores llaman movimiento variado a los cambios de magnitud, forma de sección y demás circunstancias del escurrimiento que se verifican en cortos espacios. Nosotros llamamos «*singularidades*» (1) a estas circunstancias del escurrimiento.

En canales de riego se encuentran fácilmente escurrimientos permanentes, uniformes y variados. En cañerías también es fácil encontrar corrientes uniformes. Las olas son ejemplos de movimientos impermanentes. Un rebalse o vertedero es una singularidad.

Es útil agregar a estas definiciones de los escurrimientos que estudiaremos, las

(1) Este nombre, que nos parece muy apropiado, ha sido dado por Boulangier, cuyo tomo II de Hidráulica General lo denomina «*Problèmes à singularités et applications*».

denominaciones de uso frecuente en Hidráulica; denominaciones que nada tienen de absoluto.

El lugar geométrico de los centros de gravedad de las secciones sucesivas de las corrientes cerradas, el punto medio de la superficie libre en las abiertas, se denomina *eje hidráulico*.

El eje hidráulico constituye generalmente la más sencilla referencia de la corriente.

Se llaman *napas líquidas* a los chorros que se mueven en el aire cuando son de sección rectangular de base horizontal. Si todas las dimensiones de los chorros son de magnitudes comparables, se llaman *venas líquidas*.

El escurrimiento por filetes paralelos que, como hemos dicho, caracteriza a las corrientes, se verifica en la práctica en corrientes de muy poca velocidad. Si las velocidades son mayores de cierta velocidad llamada *límite*, el escurrimiento es desordenado; las trayectorias, lejos de ser rectas, son tortuosas y variables de un momento a otro; las corrientes se ven atravesadas por movimientos giratorios que nacen en las paredes y revuelven toda la masa. Si hay superficie libre, estos movimientos son visibles por las ondulaciones de ellas.

Osborne Reynolds, en Inglaterra, entre 1883 y 1884, hizo ver la existencia de la velocidad límite que separa estas dos formas de escurrimientos y calculó su valor, proporcional, inversamente a las dimensiones de la sección y directamente a la viscosidad del líquido. Hacía escurrir el líquido por un tubo de vidrio, en cuyo centro dejaba escapar un filete coloreado. Si el movimiento de la corriente era lento, el filete coloreado seguía una trayectoria recta; si aumentaba la velocidad, bruscamente se coloreaba toda la masa, lo que hacía ver que el escurrimiento se verificaba en forma turbulenta, semejante a las volutas de humo en el aire.

Existen, pues, dos regímenes muy diferentes en el escurrimiento por filetes paralelos: el propio de las pequeñas corrientes y pequeñísimas velocidades, llamado por esto escurrimiento *capilar* o *estratificado*, (por capas), de *Poiseuille* (doctor francés, que lo descubrió estudiando el movimiento de la sangre en los vasos capilares), y el *turbulento* de las velocidades de la práctica, llamado por eso *hidráulico*.

Las ecuaciones son aplicables al líquido perfecto que se mueve con movimiento estratificado.

En los movimientos hidráulicos se observa que las velocidades en cada punto varían con una especie de periodicidad llamada *pulsación*, cuya frecuencia y amplitud, mayor cerca de las paredes y que en un mismo punto de la sección varía inversamente con la velocidad, mide en cierto modo el grado de turbulencia.

¿Cómo abordar el estudio de las corrientes con movimiento hidráulico, desordenado en sus trayectorias y de movimientos siempre variables en cada punto? Se debe a Boussinesq la aplicación de las ecuaciones generales a estas corrientes, las que más frecuentemente interesan al ingeniero.

En escurrimientos turbulentos cuyas condiciones de producción eran independiente del tiempo, por lo que podrían ser consideradas permanentes, demostraron las experiencias de Bazin, que a pesar de las pulsaciones, el valor medio de la velocidad en cada punto era constante en dirección y magnitud. El tiempo necesario para apreciar ese valor, término medio, debe ser a lo menos de uno a dos minutos.

Basado en este hecho, concibió Boussinesq el *movimiento medio local*, escu-

rrimiento hipotético en que la velocidad en cada punto del espacio es continuamente el término medio en magnitud y dirección, de las velocidades con que las moléculas del líquido pasan por ese lugar.

También se puede aplicar este concepto a los movimientos impermanentes con lenta impermanencia, tal que al calcular los términos medios de las velocidades en cada punto se suprima la pulsación mas no la variación general correspondiente a la impermanencia.

Las ecuaciones generales aplicadas a los movimientos turbulentos son simplemente el término medio de los correspondientes a los movimientos reales instantáneos.

La Hidráulica estudia casi exclusivamente el escurrimiento de corrientes medias locales permanentes de agua que se mueve sometida a su peso como única fuerza exterior. Se acepta que tal forma de escurrimiento se verifica cuando las condiciones externas permanecen invariables, aunque se produzca una corriente turbulenta.

Además, calcularemos como permanentes algunos movimientos cuya lenta impermanencia no afecte los cálculos, tales como vaciamiento de depósitos, por ejemplo.

Si los frotamientos son despreciables, los movimientos de los líquidos son regidos por el *teorema de Bernoulli*, integral de las ecuaciones de Euler, que resuelve directamente cuestiones sencillas si se conoce la forma de las trayectorias. Esto sucede en los casos que hemos llamado singularidades, especialmente si ellas se verifican sin choques de masas líquidas; pues esta circunstancia acusa una absorción de energía, cuya evaluación se debe generalmente a la experiencia.

Movimientos en que es imprescindible tomar en cuenta los frotamientos y que apoyándose en la experimentación se sabe calcular, son las corrientes permanentes uniformes y las corrientes permanentes variadas.

**15. Movimiento permanente del líquido perfecto. Teorema de Bernoulli.**—Aplicaremos las ecuaciones fundamentales a una partícula móvil, solicitada únicamente por la gravedad como única fuerza externa y animada de un movimiento permanente. En un tiempo elemental efectuará un cambio de lugar  $ds$ . Elijamos un sistema de ejes coordenados rectangular orientado de modo que el eje de las  $Z$  sea vertical ascendente, lo que nos da:

$$X=0 \qquad Y=0 \qquad Z=-g$$

Llamando  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  las proyecciones del cambio de lugar  $ds$  y notando además que, por ser permanente el escurrimiento, las derivadas parciales de la velocidad respecto al tiempo son nulas, las ecuaciones de Euler, multiplicadas por la respectiva proyección del desplazamiento, serán:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx &= - \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dx \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy &= - \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) dy \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz &= - \left( u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz - g dz \end{aligned}$$

Sumadas las tres, observando que se pueden hacer los siguientes reemplazos:

$$u \, dy = \frac{dx}{dt} \, dy = v \, dx$$

$$u \, dz = \frac{dx}{dt} \, dz = w \, dx$$

$$v \, dz = \frac{dy}{dt} \, dz = w \, dy$$

se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \, dx + \frac{\partial p}{\partial y} \, dy + \frac{\partial p}{\partial z} \, dz \right) = -g \, dz = & \left( u \, dx \frac{\partial u}{\partial x} + u \, dy \frac{\partial u}{\partial y} + \right. \\ & + u \, dz \frac{\partial u}{\partial z} + v \, dx \frac{\partial v}{\partial x} + v \, dy \frac{\partial v}{\partial y} + v \, dz \frac{\partial v}{\partial z} + w \, dx \frac{\partial w}{\partial x} + \\ & \left. + w \, dy \frac{\partial w}{\partial y} + w \, dz \frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

El paréntesis del primer miembro es el diferencial total de  $p$ ; el del segundo es el diferencial total de

$$\frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2)$$

en que el paréntesis es el cuadrado de la velocidad  $V$ . Se tiene en consecuencia:

$$\frac{1}{\rho} \, dp = -g \, dz - d \left( \frac{1}{2} V^2 \right)$$

Integrando en el líquido perfecto, dividiendo por  $g$  y notando que  $\rho g = \gamma$ , se tiene:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = Cte. \quad (3)$$

Este es el teorema de Daniel Bernoulli (lo dió a la publicidad en 1733) que expresa que en un líquido perfecto sometido a su peso y animado de un movimiento permanente es constante en el camino de cada partícula la suma de la altura geométrica o cota  $z$ , de la altura de presión  $p/\gamma$  y de la altura de velocidad  $V^2/2g$ . Los dos primeros términos en conjunto forman la *cota piezométrica*, cuya constancia define el equilibrio de los flúidos pesados. La altura de velocidad o la *altura representativa de la velocidad*, es la altura desde donde cayendo un punto material pesado, sin velocidad inicial, adquiere la velocidad  $V$ ; pues evidentemente  $h = V^2/2g$  da  $V = \sqrt{2gh}$ . La suma de los tres términos se llama *carga total* o *suma de Bernoulli* o simplemente *Bernoulli*.

La constancia de la suma de Bernoulli a lo largo de una trayectoria, demostrada para el líquido perfecto en movimiento permanente, se aplica a los líquidos reales cuando los frotamientos son despreciables y a los escurrimientos impermanentes cuyas variaciones lentas de régimen permiten prescindir de las derivadas parciales de la velocidad con respecto al tiempo, al calcular las aceleraciones de la partícula líquida en las ecuaciones fundamentales.

La constancia de la suma de Bernoulli que se verifica a lo largo del camino real de una partícula, se aplica también al camino medio local de las partículas que escurren con movimiento permanente turbulento.

Es evidente que el teorema de Bernoulli, como las ecuaciones dinámicas de donde se deduce, es aplicable a los movimientos absolutos y a los relativos a un sistema de comparación animado de un movimiento recto y uniforme.

Este teorema es la expresión del principio de la *conservación de la energía* aplicado a partículas de un líquido perfecto que escurre por su peso con movimiento permanente.

Como tal líquido es incompresible, las variaciones de presión no suponen cambio de energía interna en las partículas; por lo tanto, los incrementos de energía cinética son iguales a los trabajos que las fuerzas exteriores efectúan sobre la partícula líquida considerada. De otro modo, equivale a decir que si agregamos la energía cinética de la partícula a las energías potenciales de las fuerzas que obran sobre ella: el peso y las presiones del líquido que la rodea, se obtiene una suma constante.

La suma de Bernoulli da estas energías por unidad de peso. En efecto, la energía cinética de la partícula de masa  $m$  es:  $\frac{1}{2} m v^2$  y su peso es  $m g$ ; luego, por unidad de peso, la energía cinética es:

$$\frac{1}{2} \frac{m v^2}{m g} = \frac{v^2}{2 g}$$

El potencial del peso de la partícula, o sea, la capacidad de su peso para hacer trabajo es  $m g z$  si ella está situada a la cota  $z$ . Por unidad de peso este potencial es evidentemente  $z$ .

El potencial de las presiones por unidad de peso es  $p/\gamma$ , es decir, que el trabajo que efectúan las presiones sobre las partículas de líquido perfecto incompresible, tiene por medida, calculada por unidad de peso, la variación de altura de presión desde una posición inicial a otra final.

Las presiones son acciones interiores de la masa líquida, pero exteriores a la partícula incompresible considerada, por lo tanto, la invariabilidad de la energía interna, al efectuarse cambios de presión en la partícula (invariabilidad correlativa a su incompresibilidad), exige que las variaciones de presión se conviertan en variaciones inversas de cota o altura de velocidad. El trabajo positivo o negativo que las presiones efectúan sobre las partículas es igual y de signo contrario al que realizan sobre las partículas circunvecinas y ocasionan en ellas una variación inversa de cota o altura de velocidad.

La altura de presión va midiendo estos trasportes de energía de una partícula a otra. Un aumento de altura de presión en la partícula contemplada, indica que

la energía cinética o la potencial de su peso que se ha perdido la adquiere otra u otras partículas y puede volver a ella si desciende nuevamente la altura de presión.

Aun en los líquidos naturales compresibles, pero elásticos, es insignificante el aprisionamiento de energía dentro de cada partícula, en comparación con la variación de  $p/\gamma$ , cuando la presión aumenta; lo que permite la extensión prácticamente exacta, de lo anteriormente expuesto a los líquidos naturales.

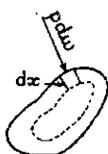


Fig. 13

Como confirmación de lo expuesto en el párrafo anterior, calcularemos la energía interna que se almacena en una partícula líquida de volumen inicial  $V_0$  que se comprime por efecto de un aumento de presión  $p$  (fig. 13). Sobre un elemento  $d\omega$  de su superficie existe la fuerza  $p d\omega$  que efectúa un trabajo  $p d\omega dx$ . La integral de los  $d\omega dx$ , extendida a toda la superficie es  $dV$  y la energía total almacenada en una variación desde un volumen primitivo  $V_0$  al final  $V_1$  es:

$$\int_{V_0}^{V_1} p dV$$

Por cada atmósfera en que se aumenta la presión, un volumen primitivo de agua disminuye en  $0,00005 V_0$ ; por lo tanto podemos escribir, si aceptamos que la variación de volumen sea constante:

$$\frac{dV}{dp} = \frac{0,00005}{10000} V_0$$

luego 
$$dV = \frac{0,00005}{10000} V_0 dp$$

En una variación de presión de  $p_0$  a  $p$  la energía interna por unidad de peso almacenada será, (reemplazando  $dV$  por su valor en función de  $p$ ):

$$\frac{0,000\ 000\ 005}{\gamma V_0} V_0 \int_{p_0}^p p dp = \frac{0,000\ 000\ 000\ 005}{2} p^2 - p_0^2$$

Si suponemos  $p_0 = 0$  y  $p = 100\ 000$  Kg/m<sup>2</sup>, es decir, una variación de presión cuya altura representativa es 100 metros de agua, la energía total almacenada por unidad de peso sería 2,5 cm., despreciable al lado de los 100 metros.

Son confirmaciones experimentales del teorema de Bernoulli todas las cuestiones de Hidráulica que en él se apoyan: pero una comprobación directa la constituye el curioso experimento verificado por Dónát Bánki. (Energia-Atalakulasok Folya-dékokban, Budapest 1920, pág. 5).

En el aparato dibujado en esquema en la *fig. 14*, abriendo la llave *M* se deja escurrir el agua del estanque por el tubo *MN*. El trozo *A* de dicho tubo era de goma de paredes muy delgadas, de modo que las presiones interiores y exteriores se transmitían fácilmente. El trozo *A* va cubierto de una ampolla de vidrio *B* unida a un tubo de goma más gruesa, pero flexible, que permite, subiendo o bajando el embudo, aumentar o disminuir la presión en la ampolla *B*. Se nota que al subir el embudo, o sea, al aumentar la presión en *B*, el tubo de goma *A* se hincha; por el contrario, se contrae al bajar la presión. Esto comprueba que transmitido al interior del tubo *A* el aumento de *p*, debía disminuir  $v^2/2g$ ; lo que para verificarse

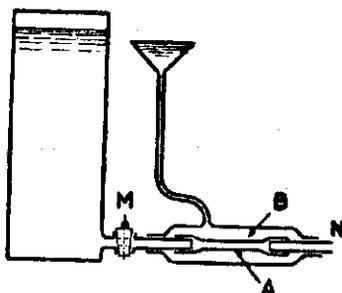


Fig. 14

necesita aumento de la sección de escurrimiento, es decir, dilatación del tubo de goma y vice-versa. Bánki hace notar que se producen vibraciones del trozo de goma por efecto de las variaciones de presión, para las cuales no ve una explicación satisfactoria. En el laboratorio hemos observado las mismas vibraciones, notando en la goma, que fácilmente se rompía, solamente la tendencia a hincharse o a contraerse.

El teorema de Bernoulli tiene representación gráfica sencilla. Si a lo largo de la trayectoria real o media local de cota *z* (*fig. 15*) se agrega la altura de presión y la altura de velocidad, se obtiene la traza de un plano horizontal, llamado *plano de carga dinámica* o simplemente *plano de carga*. La línea que separa las alturas de presión de las alturas de velocidad se llama *línea piezométrica*, pues es la línea hasta donde llegaría la columna de líquido, colocando piezómetros distribuidos a lo largo de la trayectoria del filete.

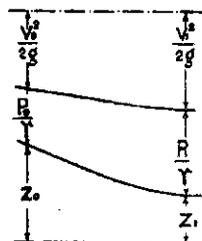


Fig. 15

La trayectoria o lugar geométrico de *z*, la línea piezométrica y el plano de carga no pueden cortarse; pues las alturas de presión y de velocidad son siempre positivas. Más aún, para que el escurrimiento de los líquidos naturales se verifique en forma continua, la altura de presión ni siquiera puede bajar de un cierto valor que depende de la naturaleza del líquido y de la calidad y cantidad de gases disueltos, que en las bajas presiones tienden a desprenderse, formando vapores que cortan el escurrimiento.

Para los cálculos ordinarios de la Hidráulica se descuentan los 10 metros de la presión atmosférica; suelen así resultar presiones negativas.

**EJEMPLO.**—En un punto de la trayectoria de un filete de cota 1,50 m., la presión es de 3 Kg:cm<sup>2</sup> y la velocidad es de 2,5 m:seg. Se quiere conocer la presión en otro punto en que la cota de la trayectoria es de 0,50 m. y la velocidad se ha aumentado a 3 m:seg.

La presión en el primer punto es de 3 Kg:cm<sup>2</sup>, es decir, 30 000 Kg:m<sup>2</sup>, y la altura de presión es

$$\frac{p}{\gamma} = \frac{30\,000}{1000} = 30 \text{ m.}$$

La altura de velocidad inicial, obtenida de la **Tabla N.º 1**, en la cual, frente a cada valor de  $h$  viene el de  $\sqrt{2gh}$ , es de 0,32 m. Esta tabla se ha calculado tomando para  $g$  el valor 9,8 m:seg<sup>2</sup>, valor de la aceleración de gravedad en Santiago. Por lo tanto la suma de Bernoulli vale:

$$1,5 + 30 + 0,32 = 31,82 \text{ m.}$$

En el segundo punto la altura de velocidad es  $\frac{v^2}{2g} = 0,46$  m. Luego se tiene

$$31,82 = 0,50 + \frac{p}{\gamma} + 0,46$$

$$\frac{p}{\gamma} = 30,86 \text{ m.} \quad p = 30860 \text{ Kg:m}^2.$$

**16. Corrientes líquidas. Gasto.**—Las corrientes, definidas como haz de filetes reales, o medios locales paralelos, constituyen la forma de escurrimiento que más interesa en Hidráulica. En ellas, la magnitud que tiene mayor importancia es el *gasto* o caudal, que es el volumen líquido que pasa por una sección en la unidad de tiempo. Definiéndolo en forma analítica para abarcar corrientes impermanentes, diremos que es la razón entre el volumen elemental que pasa y el tiempo elemental que demora en escurrir:

$$q = \frac{dV}{dt}$$

Si  $u$  es la velocidad de escurrimiento de un filete en el instante considerado, cuya sección normal es  $d\omega$ , el volumen elemental que escurre en un tiempo  $dt$  es un prisma de altura  $u dt$  y base  $d\omega$ , por lo tanto el gasto elemental del filete es:

$$q = \frac{u dt d\omega}{dt} = u d\omega$$

El gasto total de una corriente de sección normal  $\Omega$  es:

$$Q = \int_0^{\Omega} u d\omega$$

Si la sección no es normal a la velocidad, se considerará la componente normal en cada filete. En escurrimiento turbulento la velocidad que se ha de considerar en cada filete es la media local.

Se llama *velocidad media* al término medio aritmético de las componentes normales de las velocidades de todos los filetes de la corriente o, en otras palabras, a la velocidad que multiplicada por la sección da el gasto:

$$U = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} u \, d\omega = \frac{Q}{\Omega}$$

En una corriente permanente el gasto que pasa por todas las secciones es igual y, por lo tanto, se puede poner:

$$\Omega_0 U_0 = \Omega_1 U_1 = cte.$$

de donde se deduce:

$$\frac{U_0}{U_1} = \frac{\Omega_1}{\Omega_0}$$

es decir, que las velocidades medias de corrientes permanentes guardan relación inversa con las secciones respectivas. Si las secciones son circulares, la razón de las velocidades medias será inversa del cuadrado de los diámetros.

Este hecho constituye la condición de continuidad de líquidos incompresibles que escurren con movimiento permanente.

En líquidos incompresibles con movimiento impermanente, la condición de continuidad se obtiene, relacionando la variación del gasto a lo largo del camino, con la de la sección en el tiempo. En efecto, considerando el volumen líquido encerrado entre dos secciones que distan  $ds$  y cuyos gastos son:

$$Q \quad \text{y} \quad Q + \frac{\partial Q}{\partial s} ds,$$

entra por la primera sección un volumen:  $Q \, dt$

y sale por la segunda un volumen:  $(Q + \frac{\partial Q}{\partial s} ds) \, dt$

La variación de volumen es, pues:

$$Q \, dt - (Q + \frac{\partial Q}{\partial s} ds) \, dt = - \frac{\partial Q}{\partial s} ds \, dt$$

La variación de sección que a este incremento de volumen corresponde es:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} dt;$$

expresado en función de ella, el incremento de volumen es.

$$- \frac{\partial \Omega}{\partial t} dt \, ds$$

La igualdad de las dos expresiones de la variación de volumen, debida a la incompresibilidad del líquido, se expresa:

$$-\frac{\partial Q}{\partial s} ds dt = \frac{\partial \Omega}{\partial t} dt ds$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$$

ecuación que manifiesta que la variación de gasto por unidad de longitud es igual y de signo contrario a la variación de sección por unidad de tiempo.

La noción de gasto nos da otra demostración del teorema de Bernoulli por medio de la aplicación del teorema de las fuerzas vivas a un filete de líquido perfecto, de sección elemental, que escurre con movimiento permanente, solicitado por su peso como única fuerza exterior.

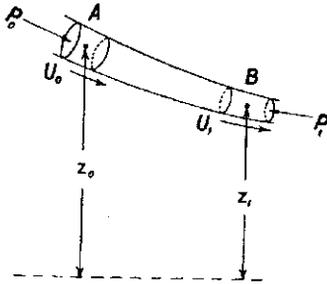


Fig. 16

Apliquemos el teorema a la masa líquida que escurre en un tiempo infinitesimal  $dt$  por las secciones normales sucesivas, desde una situación inicial A (Fig. 16) hasta otra final B a donde llega al cabo de un tiempo finito. La permanencia del movimiento dice que por cada sección la masa elemental que escurre demorará en pasar el mismo tiempo  $dt$ , lo que equivale a decir que el gasto  $dQ$  es constante. El semi-incremento de la fuerza viva

de la masa considerada, desde A a B, si  $U_0$  es la velocidad con que se traslada en A y  $U_1$  la velocidad en B, será:

$$\frac{\gamma}{g} \frac{dQ dt}{2} (U_1^2 - U_0^2)$$

Esta cantidad ha de ser igual al trabajo que las fuerzas que obran sobre la masa, efectúan desde A a B. El trabajo del peso, si  $z_0$  y  $z_1$  son las cotas del centro de gravedad en las posiciones inicial y final, será:

$$\gamma (z_0 - z_1) dQ dt$$

Las otras fuerzas exteriores son las presiones que obran sobre la superficie de la masa considerada. Las que obran sobre la envoltura cilíndrica son normales a ella y dan proyección nula sobre el camino; por lo tanto, su trabajo es nulo. Quedan las de las secciones planas que la limitan, pues podemos considerar la masa como un prisma recto. En su posición inicial, la presión  $p_0 d\omega_0$  que obra paralela al camino, trabaja a lo largo de  $U_0 dt$ ; pero llegada la sección posterior a la sec-

ción  $MN$  (fig. 17) la presión es igual y de sentido contrario a la que obraba en ese punto cuando en la situación  $MN$  estaba la sección anterior. Desde ahí las presiones sobre las caras anteriores efectúan un trabajo igual y de signo contrario al de las presiones en la cara posterior. Queda en  $B$  un saldo de trabajo:  $-p_1 d\omega_1 U_1 dt$ .

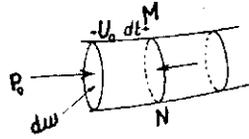


Fig. 17

Los frotamientos o componentes tangenciales no existen pues, por hipótesis, se trata del líquido perfecto, y la energía interna no varía por ser el líquido incompresible. En consecuencia, se tiene:

$$\frac{\gamma}{g} \frac{dQ dt}{2} (U_1^2 - U_0^2) = \gamma dQ dt (z_0 - z_1) + p_0 U_0 d\omega_0 dt - p_1 U_1 d\omega_1 dt$$

Simplificando y notando que:

$$d\omega_0 U_0 = d\omega_1 U_1 = dQ$$

queda:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} + \frac{U_0^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g}$$

que es la expresión del teorema de Bernoulli.

Las corrientes definidas como haces de filetes reales o medios-locales paralelos o de curvatura muy pequeña, presentan una cualidad que simplifica mucho los cálculos. Ella es que en la sección normal rige la ley hidrostática.

En efecto, tomemos en el seno de una corriente un sistema de ejes coordenados, dando al eje de las  $X$  la dirección de la corriente (fig. 18) y colocando los ejes  $Y$  y  $Z$  en la sección normal de modo que el primero sea horizontal. Si aceptamos que las componentes  $v'$  y  $w'$  de la aceleración de las partículas según estos últimos ejes son nulas, y tomamos en cuenta que la componente  $Y$  de las fuerzas exteriores es nula, y que  $Z$  vale  $-g \cos i$ , siendo  $i$  el ángulo que forma el haz de filetes con la horizontal, las ecuaciones de proyección sobre los últimos ejes, son:

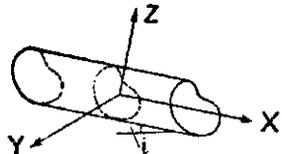


Fig. 18

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = 0$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = -g \cos i$$

La última ecuación es la expresión diferencial de la ley hidrostática y la de proyección sobre el eje  $Y$  la confirma, pues dice que es nula la variación de pre-

sión en la horizontal. Si existe superficie libre la sección queda limitada por ella en una recta horizontal.

La ecuación dinámica sobre el eje de las  $X$  es frecuentemente estudiada introduciendo en ella los frotamientos. De ella se deduce la ecuación general de las corrientes permanentes.

**17. Extensión de la suma de Bernoulli a toda la corriente.**—El teorema de Bernoulli demostrado para un filete

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = cte.$$

se puede extender a toda la corriente, entre dos secciones en que rige la ley hidrostática. Si queremos calcular el valor medio de la suma de Bernoulli que corresponde en cada sección al caudal que pasa en la unidad de tiempo por ella, multiplicaremos los Bernoulli de cada filete por  $dQ$ , gasto de cada uno, integraremos de *cero* a  $Q$  y dividiremos por  $Q$ .

$$\frac{1}{Q} \int_0^Q \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) dQ = cte. \quad (11)$$

Notando que en esta ecuación  $z + p/\gamma$  es la cota piezométrica idéntica para todos los filetes, porque en la sección rige la ley hidrostática, y que por lo tanto vale lo mismo en todos los filetes. Se obtiene:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{1}{Q} \int_0^Q \frac{u^2}{2g} dQ = cte. \quad (11a)$$

Poniendo en vez de  $Q$  su valor  $\Omega U$ ; y  $u d\omega = dQ$  tenemos:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{1}{2g\Omega U} \int_0^\Omega u^2 d\omega = cte. \quad (11b)$$

Si para el cálculo del valor medio se toma como coeficiente de importancia la sección elemental de cada filete, equivale a decir que se quiere calcular el valor medio de la suma de Bernoulli del agua comprendida, en un instante dado, entre dos secciones infinitamente próximas. Como las secciones sucesivas van cambiando en el movimiento variado; para tomar en cuenta también esta clase de corrientes, no podríamos multiplicar el Bernoulli por los elementos de área e integrar, pues no se conservaría la constancia. En cambio al derivar el Bernoulli de un filete respecto al

camino se obtiene una cantidad nula, puesto que es constante, ella después de integrada también será nula. Dicha derivada es:

$$\frac{dz}{ds} + \frac{l}{\gamma} \frac{dp}{ds} + \frac{u}{g} \frac{du}{ds} = 0$$

Multiplicando esta ecuación por  $d\omega$ , integrándola entre *cero* y  $\Omega$  y dividiéndola por  $\Omega$  tendremos, en forma análoga a la ecuación (11):

$$\frac{l}{\Omega} \int_0^{\Omega} \left( \frac{dz}{ds} + \frac{l}{\gamma} \frac{dp}{ds} + \frac{u}{g} \frac{du}{ds} \right) d\omega = 0 \quad (12)$$

La suma de los dos primeros términos del paréntesis constituye la derivada de la cota piezométrica, igual para todos los filetes porque rige la ley hidrostática, y por lo tanto tiene un valor constante en toda la sección, podemos, en consecuencia, escribir esta ecuación como sigue:

$$\frac{dz}{ds} + \frac{l}{\gamma} \frac{dp}{ds} + \frac{l}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{l}{g} \frac{du}{ds} u d\omega = 0 \quad (12a)$$

Nada se altera si en el integral del tercer término introducimos dentro del signo derivada el gasto constante  $u d\omega$  del filete, que está fuera de él. Además, invirtiendo el orden de la integración y la derivación respecto al camino, podemos escribir finalmente la ecuación:

$$\frac{dz}{ds} + \frac{l}{\gamma} \frac{dp}{ds} + \frac{l}{\Omega g} \frac{d}{ds} \int_0^{\Omega} u^2 d\omega = 0 \quad (12b)$$

Tenemos, pues, dos integrales análogas en las ecuaciones (11b) y (12b); para encontrar su valor, en función de la velocidad media  $U$ , escribamos que la velocidad de un filete es igual a esta media más un exceso  $w$ , positivo o negativo

$$u = U + w$$

podemos escribir

$$\frac{u}{U} = 1 + \frac{w}{U};$$

el cuadrado de esta razón es:

$$\left( \frac{u}{U} \right)^2 = 1 + 2 \frac{w}{U} + \left( \frac{w}{U} \right)^2$$

y el cubo

$$\left(\frac{u}{U}\right)^3 = 1 + 3 \frac{w}{U} + 3 \left(\frac{w}{U}\right)^2 + \left(\frac{w}{U}\right)^3$$

Multiplicando la primera, segunda y tercera potencia de la razón  $u/U$  por  $d\omega$ , integrando de *cero* a  $\Omega$  y dividiendo por  $\Omega$ , se tiene:

$$\frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{u}{U} d\omega = 1 + \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{w}{U} d\omega$$

$$\frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{u^2}{U^2} d\omega = 1 + \frac{2}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{w}{U} d\omega + \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{w^2}{U^2} d\omega$$

$$\frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{u^3}{U^3} d\omega = 1 + \frac{3}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{w}{U} d\omega + \frac{3}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{w^2}{U^2} d\omega + \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{w^3}{U^3} d\omega$$

El primer miembro de la primera de estas ecuaciones vale la unidad, pues  $\int_0^{\Omega} u d\omega$  es el gasto  $Q$  de la corriente dividido por sí mismo  $\Omega U$ ; luego el integral  $\frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{w}{U} d\omega$ , es nulo, lo que era evidente al considerar que este integral es el término medio de las diferencias de las velocidades individuales con la media. Aparece dividido por el gasto  $\Omega U$  que no afecta su nulidad. En cambio el integral  $\frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{w^2}{U^2} d\omega$  no puede ser nulo, y es siempre positivo cualesquiera que sean los signos de los  $w$  individuales. Este integral es llamado generalmente  $\eta$ . En la última ecuación aparece el integral  $\frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{w^3}{U^3} d\omega$ , cuyo valor es generalmente muy pequeño, pues en él, los excesos positivos al cubo que son por esto pequeños, tienden además a ser compensados con los negativos. Este integral generalmente despreciable lo llamaremos  $\beta$ .

Podemos, pues, escribir la segunda y tercera de estas ecuaciones:

$$\frac{1}{\Omega U^2} \int_0^{\Omega} u^2 d\omega = 1 + \eta = \alpha' \quad (13)$$

$$\frac{1}{\Omega U^3} \int_0^{\Omega} u^3 d\omega = 1 + 3\eta + \beta = \alpha \quad (14)$$

Estos coeficientes numéricos  $\alpha'$  y  $\alpha$  (1), como generalmente se los designa, entran en el valor de los integrales que nos interesan, pues de aquí obtenemos:

$$\int_0^{\Omega} u^2 d\omega = \alpha' \Omega U^2$$

$$\int_0^{\Omega} u^3 d\omega = \alpha \Omega U^3$$

Introduciendo estos valores en las ecuaciones (11b y 12b, tendremos respectivamente:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} = \text{cte.} \quad (15)$$

$$\frac{dz}{ds} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} + \frac{1}{\Omega g} \frac{d}{ds} (\alpha' \Omega U^2) = 0 \quad (15a)$$

Sacando fuera el gasto constante esta última ecuación es:

$$\frac{dz}{ds} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} + \frac{U}{g} \frac{d}{ds} (\alpha' U) = 0 \quad (16)$$

La ecuación (15 nos dice que la energía cinética media de toda la corriente se obtiene multiplicando la altura de velocidad media por el coeficiente  $\alpha$ . Los coeficientes  $\alpha$  y  $\alpha'$  que elevan el término medio aritmético  $U$  a término medio cuadrático son siempre superiores a la unidad, y tres veces superior el exceso de  $\alpha$  sobre la unidad que el de  $\alpha'$ . Ambos se miden por medio de  $\eta$  que depende de las diferencias relativas de velocidades y no de sus valores absolutos en la sección. Veremos en el estudio de las corrientes, que en movimiento uniforme su valor es constante y depende de la rugosidad de las paredes. En régimen gradualmente variado las variaciones de  $\alpha$  y  $\alpha'$  son inversas de las de  $U^2/2g$ , y en general lo mismo sucede en las singularidades en que varía  $U^2/2g$  entre dos secciones en que rige la ley hidrostática. En efecto, al pasar de una sección a otra, si en ambas rige la ley hidrostática, la cota piezométrica tiene un valor común para todos los filetes en cada una de esas secciones. Si hay variaciones entre ambas secciones, en la cota piezométrica común, es porque la diferencia se ha convertido en altura de velocidad. En otras palabras, todos los filetes reciben incrementos iguales de altura de velocidad, es decir, varían su velocidad en una misma cantidad; por lo tanto, si ese incremento es positivo, todas las velocidades de la segunda sección tienden a igualarse.

(1) Las denominaciones de  $\alpha$  para el coeficiente  $1 + 3\eta$  y de  $\alpha'$  para el  $1 + \eta$  son universalmente seguidas, a excepción de los autores italianos Masoni y Spataro que las invierten.

si es negativo, sus diferencias relativas han aumentado. La experiencia confirma este lógico razonamiento.

En el líquido perfecto, libre de frotamientos, en que el Bernoulli se conserva, se puede encontrar una relación entre las variaciones de  $\eta$  y las de  $U$ . En efecto, si derivamos la ecuación (15, con respecto al camino, se tiene:

$$\frac{dz}{ds} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} + \frac{d}{ds} \left( \alpha \frac{U^2}{2g} \right) = 0 \quad (16a)$$

Igalándola con la ecuación (16, se obtiene:

$$\frac{d}{ds} \left( \alpha \frac{U^2}{2g} \right) = \frac{U}{g} \frac{d}{ds} (\alpha' U) \quad (17)$$

reemplazando  $\alpha$  y  $\alpha'$  por sus valores en función de  $\eta$ , multiplicando por  $ds$  y por  $g$  obtenemos:

$$d \left[ (1+3\eta) \frac{U^2}{2} \right] = U d \left[ (1+\eta) U \right] \quad (17)$$

ejecutando la diferenciación indicada:

$$(1+3\eta) U dU + \frac{3}{2} U^2 d\eta = (1+\eta) U dU + U^2 d\eta \quad (18)$$

$$\frac{4 dU}{U} = - \frac{d\eta}{\eta} \quad (18a)$$

Esta relación manifiesta que las variaciones relativas de la velocidad son inversas y cuatro veces mayores que las del coeficiente  $\eta$ .

Integrando esta expresión obtenemos:

$$\begin{aligned} 4 \text{Log } U &= -\text{Log } \eta + \text{cte.} \\ \eta U^4 &= \text{cte.} \end{aligned} \quad (18b)$$

De la ecuación (18a, podemos obtener el valor de  $d\eta$  que reemplazado en la (18 nos da la identidad

$$(1-3\eta) U dU = (1-3\eta) d \frac{U^2}{2}$$

o si dividimos por  $g$  y por  $ds$  obtendremos en cada miembro de la (17:

$$(1-3\eta) \frac{d}{ds} \frac{U^2}{2g} \quad (19)$$

Recordando que los miembros de la (17), son los últimos términos de la (15a, y de la (16, tendríamos la ecuación completa:

$$\frac{dz}{ds} + \frac{1}{\gamma} \frac{dp}{ds} + (1-3\eta) \frac{d}{ds} \frac{U^2}{2g} = 0. \quad (20)$$

ecuación que demuestra que si se quiere calcular las variaciones de la energía cinética entre dos secciones, computadas éstas por las alturas de velocidad media, es necesario multiplicar su diferencia por un número menor que la unidad, como lo había previsto Dupuit (1) y manifiesta el error en que incurren algunos hidraulicistas que al poner

$$\alpha'' \frac{U_1^2 - U_0^2}{2g}$$

atribuyen a  $\alpha''$  el valor de  $\alpha = 1 + 3\eta$ , coeficiente que es siempre mayor que la unidad.

La ecuación (20, multiplicada por  $ds$  es integrable:

$$\int_{z_0 + \frac{p_0}{\gamma}}^{z_1 + \frac{p_1}{\gamma}} d\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) + \frac{1}{2g} \int_{U_0^2}^{U_1^2} (1-3\eta) dU^2 = 0$$

El integral del segundo término lo podemos hacer encontrando un adecuado valor  $(1-3\eta')$  que sea el valor medio de este coeficiente en el campo de integración: como los valores sucesivos  $1-3\eta$  en todo dicho campo son menores que la unidad, lo será también ese valor medio  $(1-3\eta')$  que ha de multiplicar a la diferencia  $\frac{U_1^2 - U_0^2}{2g}$ .

Integrando se tiene:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} - z_0 - \frac{p_0}{\gamma} + (1-3\eta') \frac{U_1^2 - U_0^2}{2g} = 0$$

de donde se deduce:

$$\frac{1}{1-3\eta'} = \frac{\frac{U_1^2 - U_0^2}{2g}}{z_0 + \frac{p_0}{\gamma} - z_1 - \frac{p_1}{\gamma}} > 1$$

(1) Dupuit: Etudes theoriques et pratiques sur le mouvement des eaux courrants, 1843, págs. 69 y siguientes.

ecuación que nos dice que entre dos secciones de una corriente de líquido perfecto es mayor la diferencia de alturas de velocidad media que las diferencias de cotas piezométricas entre ellas o, como podríamos decir, que el *rendimiento* de las energías cinéticas computadas por las velocidades medias es mayor que la unidad.

Algunos hidraulicistas asignan a  $\alpha = 1 + 3\eta$  un valor único tal como 10/9; tal valor no es real. En movimiento uniforme turbulento ha dado Bazin relaciones experimentales que deben tomarse en esos casos; en movimiento gradualmente variado, demostraremos que puede prescindirse de  $\alpha$  y en las singularidades (1) debe aceptarse  $\alpha$  de acuerdo con las circunstancias del fenómeno en estudio. Más vale tomar en todo caso  $\alpha = 1$ , como lo hacen muchos autores (2) que apartarse de la unidad en distinto sentido que el exigido por la teoría y la experiencia (3).

EJEMPLO.—En un canal rectangular se conoce en una sección AA (Fig. 19) la ley de repartición de velocidades en una vertical, que es dada por la expresión

$$u = 2 - \frac{2}{3} x^2 \text{ en m:seg.}$$

En esta expresión  $u$  es la velocidad a la profundidad  $x$ , contada desde la superficie libre. La profundidad total en AA es  $h_A = 1,50$  m.

Se pide calcular la profundidad en otra sección DD, en que el fondo ha subido 0,4 m, si en AA y DD rige la ley hidrostática y es aplicable al teorema de Bernoulli.

Para calcular la suma de Bernoulli en AA necesitamos conocer la velocidad media  $U_A$  y  $\alpha_A$ . Haciendo el cálculo por unidad de ancho, calculemos previamente el gasto.

(1) Bazin da aguas arriba de vertederos valores de  $\alpha$  variables entre 1,4 y 2,43, producidos por retardos continuados de velocidades muy pequeñas (entre 0,3 y 0,4 m:s), en canales de paredes muy lisas. Son además valores deducidos en forma indirecta. En canales de tierra, con retardos de velocidades, de magnitudes absolutas mayores, hemos medido directamente valores de  $\alpha$  que llegaban al valor máximo 1,60. En movimientos ideales estratificados, uniformes, el cálculo da  $\alpha = 2$ .

(2) Lang (Hütte).—Russell: Text-book on Hydraulic (Tecnológico de Boston) 1921.—Merriman: Treatise on Hydraulic 1916.—Weyrauch: Hydraulisches Rechnen 1921 (Hochschule Stuttgart).—Forchheimer: Grundriss der Hydraulik 1924.—Salas E.: Esguerrimiento variado 1923 Boudin: L'axe hydraulique 1863.—Spataro: Idraulica teorica e sperimentale 1924. En general los autores franceses que siguen a Saint Venant y Boussinesq aun lo conservan y algunos como Mouret hacen valer en esguerrimiento variado los valores dados por Bazin para el movimiento uniforme, lo que es inaceptable.

(3) Si se trata de calcular la cantidad de movimiento media del caudal que pasa en la unidad de tiempo por una sección, útil para numerosas aplicaciones de la Hidráulica, aparece naturalmente el coeficiente ya definido antes  $\alpha'$ . En efecto, el gasto elemental  $u \, d\omega$ , cuya masa es  $\gamma/g \, u \, d\omega$  tiene una cantidad de movimiento  $\gamma/g \, u^2 \, d\omega$ ; la de toda la corriente es

$$\frac{\gamma}{g} \int_0^{\Omega} u^2 \, d\omega = \frac{\gamma}{g} \alpha' \Omega U^2$$

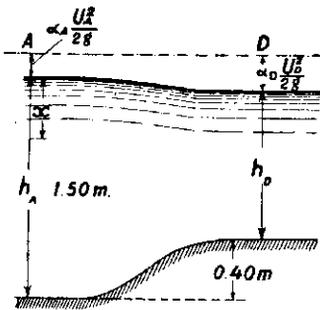


Fig. 19

$$Q = \int_0^{1,5} \left(2 - \frac{2}{3} x^2\right) dx = 2 \times 1,5 - \frac{2}{3} \times \frac{1,5^3}{3} = 2,25 \text{ m}^3/\text{s}.$$

La velocidad media es entonces

$$U = \frac{2,25}{1,50} = 1,50 \text{ m/s}.$$

La altura de velocidad correspondiente, encontrada en la **Tabla N.º 1**, es

$$\frac{U^2}{2g} = 0,1148 \text{ m}.$$

Para tener exactamente  $\eta$ , que lo necesitaremos después, calcularemos primeramente  $\alpha' = 1 + \eta$ .

$$\alpha'_A = \frac{1}{2,25 \times 1,5} \int_0^{1,5} \left(2 - \frac{2}{3} x^2\right)^2 dx$$

$$\alpha'_A = \frac{1}{2,25 \times 1,5} \left(4 \times 1,5 - \frac{8}{3} \frac{1,5^3}{3} + \frac{4}{9} \frac{1,5^5}{5}\right)$$

$$\alpha'_A = 1,0888 \quad \eta_A = 0,0888$$

De aquí podríamos deducir

$$\alpha_A = 1 + 3 \eta = 1,267$$

Calculando  $\alpha_A$  directamente por la expresión  $\frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} \frac{u^3}{U^3} d\omega$

resulta

$$\alpha_A = 1,279$$

lo que quiere decir que

$$\beta = 0,012$$

La altura media de velocidad en AA, que excede algo a la altura de velocidad media, es:

$$\alpha_A \frac{U_A^2}{2g} = 1,27 \times 0,115 = 0,146 \text{ m}.$$

Por lo tanto, la suma de Bernoulli media de la corriente, contada desde el

fondo en AA, si notamos que la cota piezométrica es, por la ley hidrostática, simplemente la profundidad:

$$B_A = 1,5 + 0,146 = 1,646 \text{ m.}$$

La suma de Bernoulli en DD, contada igualmente desde el fondo, es,

$$B_D = 1,646 - 0,40 = 1,246 \text{ m.}$$

y debe satisfacer la ecuación:

$$B_D = h_D + \alpha_D \frac{U_D^2}{2g} = 1,246 \text{ m.}$$

Debemos notar que  $\alpha_D = 1 + 3 \eta_D$  debe cumplir la relación:

$$\eta_A U_A^4 = \eta_D U_D^4 = \text{cte.}$$

Calculando con los elementos ya conocidos de la sección AA, obtenemos:

$$\eta_A U_A^4 = 0,0888 \times 1,5^4 = 0,450$$

Para calcular  $h_D$ ,  $\alpha_D$  y  $\frac{U_D^2}{2g}$  procederemos por tanteos, suponiendo previamente  $\alpha_D = 1$ . Tendríamos, reemplazando la velocidad por su equivalente, en función del gasto, la ecuación de tercer grado en  $h$ :

$$B_D = h_D + \frac{Q^2}{2g h_D^3}$$

que para  $B_D = 1,246$  y  $Q = 2,25 \text{ m}^3/\text{seg.}$  se satisface (1) con  $h_D = 0,99$  y con  $h_D = 0,65 \text{ m.}$  Tomaremos únicamente la mayor. La profundidad efectiva es algo menor, pues  $\alpha_D$  es mayor que la unidad, aunque por la disminución de  $h$  (de 1,50 a cerca de 1 m.) la velocidad ha aumentado y  $\alpha$  ha tendido a la unidad.

Para  $h = 0,99$  correspondería

$$U = \frac{2,25}{0,99} = 2,27 \text{ m/seg.}$$

(1) En este mismo capítulo, poco después se encuentra el método para calcular las alturas de agua de esta ecuación, eliminando la ecuación de tercer grado.

Las dos raíces positivas son  $h_1 = 0,99 \text{ m.}$  y  $h_2 = 0,65$ . Al estudiar las corrientes abiertas se fijará el criterio que demuestra que es válida aquí solamente la aceptada:  $h = 0,99$ .

(2) Esta afirmación se demuestra en este mismo capítulo, poco más adelante, al decir que los ríos pierden Bernoulli con la altura.

Este valor reemplazado en  $\eta U^2 = 0,450$  nos daría  $\eta_D = 0,0176$  y por lo tanto nos da idea del valor de  $\alpha_D = 1 + 3 \eta_D = 1,05$ , Como multiplicado este  $\alpha_D$  por  $U_D^2/2g$  del primer tanteo llegaríamos a un Bernoulli mayor que 1,246, es necesario bajar  $h_D$  (2) para un segundo tanteo,

Después de tantear se obtiene:

$$h_D = 0,944 \quad U_D = 2,38 \text{ m:seg.} \quad \frac{U_D^2}{2g} = 0,29 \text{ m,}$$

$$\eta_D = 0,014 \quad \alpha_D = 1,042 \quad \alpha_D \frac{U_D^2}{2g} = 0,302$$

valores que verifican las ecuaciones

$$U_D h_D = Q = 2,25 \text{ m}^3 \text{:seg.}$$

$$h_D + \alpha_D \frac{U_D^2}{2g} = B_D = 1,246 \text{ m.}$$

Es útil observar, para terminar, los siguientes resultados obtenidos:

$$\frac{U_D^2 - U_A^2}{2g} = 0,188 \text{ m.} \quad \frac{\alpha_D U_D^2 - \alpha_A U_A^2}{2g} = 0,156 \text{ m.}$$

Por lo tanto, el coeficiente  $\alpha'' = (1 - 3 \eta')$  que multiplicado por

$$\frac{U_D^2 - U_A^2}{2g}$$

nos habría dado la diferencia de energías cinéticas medias entre ambas secciones, habría valido:

$$\alpha'' = \frac{0,156}{0,188} = 0,830$$

es decir, como se demostró, menor que la unidad. La diferencia con la unidad es precisamente  $1 - 0,83 = 3 \eta' = 0,17$ , o sea, corresponde al valor medio  $\eta' = 0,056$ . Este valor está efectivamente comprendido entre  $\eta_A = 0,0888$  y  $\eta_D = 0,0140$ , cuyo término medio aritmético es:

$$\frac{\eta_A + \eta_D}{2} = \frac{0,0888 + 0,0140}{2} = 0,0514$$

muy parecido al de  $\eta'$ . Lo que hemos llamado rendimiento sería:

$$\frac{1}{\alpha''} = \frac{1}{1 - 3 \eta} = 1,205$$

mayor que la unidad, como quedó dicho.

(Continuará).