Sistemas Sintéticos: Lo inteligible en los manuales para la enseñanza

Dr. Alberto Camacho Ríos (camachoalberto@hotmail.com) Instituto Tecnológico de Chihuahua II (México)

Abstract

The problem is focused on showing how fundamental knowledge arises from two dominances in opposition. Such fundamental knowledge gives structure to texts whose content is dedicated to the teaching.

Key words: contingency, synthesizer, textbooks

Resumen

Nuestro propósito es mostrar cómo de lo contingente de dominios que estuvieron en oposición, surgieron aquellos conocimientos fundamentales que dieron estructura a obras de ciencias y obras elementales dedicadas a la enseñanza de la matemática.

Palabras claves: contingencia, sintetizar, obras elementales.

Introducción

Un argumento de inicio será fundamental para introducir esta temática, es la siguiente pregunta: ¿Cómo se puede analizar una obra elemental?

Las obras elementales fueron manuales de matemáticas y otras disciplinas, que bajo esa denominación se usaron a lo largo de los siglos XVII al XIX para la enseñanza. La cuestión surge importante debido a que durante los últimos diez años, dicha pregunta ha estado inmersa en el contexto de investigación de nuestro grupo de Matemática Educativa y en diversos congresos que asumen esta orientación. El enfoque mediático que justifica el análisis de los manuales para la enseñanza de la matemática, ha sido la búsqueda en la historia de las reformulaciones de los conceptos matemáticos que nos han guiado en la definición de nuestros proyectos de investigación, dentro del concurso de las dimensiones social, conceptual y epistemológica, y en el diseño de un buen número de situaciones didácticas que han tenido amplia acogida e impacto en la enseñanza de conceptos matemáticos que recurrentemente nos causan problemas de aprendizaje en el salón de clase.

Para los estudiosos de la historia de la ciencia la pregunta ha sido central. Al finalizar el siglo XIX y a lo largo del siglo XX los historiadores de la ciencia vieron con profundidad la importancia de la investigación textual. L. Brunshvicg realizó en Francia a principios del siglo XX, una disertación extensa de la historia de las matemáticas que partía de los clásicos griegos hasta finalizar con la matemática expuesta en las respectivas obras de Comte, Cauchy, Lagrange y Fresnel (*Vid.* Brunshvicg, 1922). Un discípulo suyo, G. Bachelard, propuso a mediados del siglo dos nociones imprescindibles para el estudio de la historia de la ciencia: aquella de *obstáculo epistemológico* y la otra, de *acto epistemológico.* El primero de estos ampliamente reconocido, es por hoy un pilar de nuestra disciplina. El segundo corresponde a las *sacudidas del genio que aporta impulsos inesperados en transcurso del desarrollo científico.* Esta dialéctica entre *obstáculo* y *acto* deja ver con transparencia como los *impulsos* del pensamiento científico refieren las reformulaciones o epistemologías sufridas por el conocimiento a lo largo del tiempo (*Cfr.* Bachelard, 1971). El punto de vista de Bachelard sugería que en el estudio de la historia de las ciencias, a partir de el análisis documental, se debía *distinguir el error y la verdad, lo inerte y lo activo, lo perjudicial y lo fecundo* siguiendo la huella de las diferentes *rupturas* y discontinuidades del conocimiento y no solamente la continuidad de la historia de los conocimientos mismos. En 1962 T. Kuhn, al tratar de encontrar las diferencias sobre los fundamentos de la historia de las ciencias, reconoció la importancia del papel que desempeña el concepto de *paradigma*, vio estos como síntesis históricas del conocimiento que han desencadenado cambios que afectan la estructura de las revoluciones científicas. A diferencia de Bachelard, Kuhn consideraba las transformaciones del conocimiento a partir de un saber ya constituido o bien como la mejor imagen que la historia de la ciencia ofrece de este último, el cual enmarca el paradigma en cuestión, toda vez que estos archivan el paso de una teoría a otra. A finales de los setenta, Koyré impulso la idea de analizar la evolución del pensamiento científico a través de estrechar las concepciones trans-científicas de disciplinas antiguas como la filosofía, metafísica y religión, ello dio para un estudio del paso del espacio finito griego hacia una concepción geométrica del espacio infinito que merecía la modernidad del siglo XVII. La ruta de investigación que siguió la noción de ruptura y paradigma a lo largo del siglo XX, orientó la visión de las diferentes disertaciones que al respecto se han obtenido desde los años sesenta en adelante.

En esencia, el objeto de la tarea de los investigadores de la ciencia a través del análisis textual, ha sido a lo largo del siglo pasado y en lo que va del presente, el restablecimiento de *tradiciones científicas*. Una *tradición* científica significa la acción de *transmitir* a lo largo de cierto período de tiempo un saber. Este último puede ser colocado en las obras en forma de proposición, de teorema, como resultado de una práctica, como protocolos que indican los modos en que se deben enseñar ciertos conceptos, como una definición manipulada, etc. La labor del especialista será, en una primera etapa, la de *entender* dicho material para, con ello, se dice fácil, concurrir a la reconstitución de la tradición textual, la cual es sustentada por el discurso conceptual del saber.

El análisis de obras elementales

En torno al estudio de los manuales para la enseñanza de la matemática de los siglos XVII al XIX, Shubring propuso en los ochenta un enfoque holístico comprendido en un diseño tridimensional que involucraba analizar los cambios de las varias ediciones de los textos, la verificación de los cambios en otros libros correspondientes a la misma *oeuvre*, y la observación de los cambios en el contexto: planes y programas de estudio, decretos ministeriales, epistemologías, etc. Al finalizar el siglo (Belhoste, Dalmedico, *et, al*, 1994), se dirigió un estudio en tres partes de la *école polytechnique*. Ha sido ésta la primera obra sobre historia de la enseñanza de las matemáticas y de la formación en la escuela desde su fundación hasta nuestros días. Es el fruto de un examen crítico, apoyado por una investigación histórica de los fondos documentales y textuales de la escuela, de la que desgranan historiografías, conocimientos, tradición científica y enseñanza a partir de su vocación militar. Un año antes, en Dalmedico (1993) se estudió la obra de Cauchy, tomando como eje central una escala en el tiempo observada como un *fractal* que llevó a poner en evidencia elementos suplementarios de la vida del autor: vacilaciones, influencias, rivalidades, etc.

Por nuestra parte, a lo largo del último lustro del siglo XX, y hasta el año 2000, el enfoque que utilizamos en Camacho (2000) para el análisis de los manuales fue establecido a través del conocimiento matemático que aparece en dichos documentos, el cual fue vehiculado por *flujos de difusión* de conocimientos que emergieron de Europa desde finales del siglo XVIII y a lo largo del siglo XIX, fundamentalmente de España y Francia, y que tuvieron consecuencias poco favorables en la enseñanza de la matemática de los colegios mexicanos, por las *prácticas de transculturación* acontecidas al conocimiento en los textos: obras compendiadas, cortes, inserciones, traslación de ideologías, sujeción cultural, etc.

Ciencia y proto-ciencia

Para el 2001, R. Rashed, presidente de la *International Union of History and Philosophy of Science*, hizo distinción entre lo *proto-científico* y lo científico, ofreciéndole como una distinción exclusiva que domina enteramente la historia de las ciencias (*Vid.* Rashed, 2001). Esta oposición debe ser entendida como histórica y lógica a la vez, permitiendo por consecuencia distinguir una obra de ciencia de otra en la que se pretenda tratar el mismo objeto. No obstante, Rashed sustrajo las matemáticas de esta oposición debido a que las piezas exclusivas de la *proto-matemática* pertenecen a la matemática misma: *los indivisibles, las consideraciones sobre la noción de límite a lo* *largo del siglo XVIII, etc*. Esto último no ocurre con las otras disciplinas en las que lo proto-científico les cubre de diversas maneras.

Para mejor comprender el pensamiento de Rashed, evoquemos aquí los casos de los fundamentos de dos tradiciones preocupadas por un mismo objetivo. La definición del cálculo de las fluxiones de Newton, tomó sentido a partir de *engendrar las cantidades* por la permisibilidad que da su naturaleza, cual es la de *aumentar* o *disminuir* con movimiento uniforme. Por su parte Leibniz, incorporó a las cantidades una convención de naturaleza no-real, las *cantidades infinitamente pequeñas.*

A pesar de las diferencias en los dominios, en Newton las cantidades se engendran a partir del movimiento uniforme dando lugar a un modelo geométrico, en tanto que en Leibniz esta posibilidad ocurre por los infinitamente pequeños, configurando una propuesta algorítmica, se puede decir que cada uno habla el lenguaje del otro y pareciera que ambos proyectos sólo son traducibles en la estructura notacional del análisis estándar contemporáneo. La posible traducción es el punto de vista de Rashed. Bajo esta óptica el cálculo estándar marca un principio de orden, una noción de distancia que rectifica no sólo a los *proto-conocimientos* sino, además, al sinnúmero de epistemologías que le sostienen.

La síntesis newtoniana del espacio

No obstante, y como es sabido, la conciliación de estos dominios del cálculo llevó a una tradición que duró varios siglos. Los primeros acercamientos tuvieron en su inicio contradicciones en las formas del conocimiento que engendraron, pudiéndose explicar estos últimos con el adjetivo de *meta-conceptos*; es decir, conocimientos abstractos u oscuros, situados en una etapa primitiva o en una *proto-matemática,* siguiendo a Rashed, difíciles de determinar en el dominio de lo real.

Estas expresiones fueron resultado de una deliberación del pensamiento, el cual fue sujeto a la noción universal de *espacio* y a sus cualidades de extensión establecidas por los primeros analistas, como Newton. Este concibió el *espacio absoluto* sin definirle como *siempre similar e inmóvil.* Empero la contingencia, el *espacio relativo* fue pensado como *cierta dimensión móvil o medida de los espacios absolutos.* Consecuentemente su extensión, y particularmente las cantidades, fueron pensadas como *crecientes o decrecientes con movimiento continuo, a la manera del espacio que describe un cuerpo en movimiento.*

A tal definición llegó a partir de suprimir de la noción de espacio una o varias determinaciones, a excepción de la idea de extensión, lo cual le originó una idea genérica a la que ya no respondió el espacio en lo real. Este corte le hizo a determinaciones que conservaban un carácter finito, las cuales al ser suprimidas hicieron que la extensión deviniera infinita. Ello le permitió reconsiderar el espacio a partir de un atributo de éste, cual es la *noción de cantidad*.

En su caso la noción de cantidad representaba recintos del espacio, y era el concepto en juego. La definición de esa noción antes de Newton era: *Cantidad es todo aquello que aumenta o disminuye.* La reformulación de Newton a través de su concepción geométrico-espacial fue: *Cantidades son crecientes o decrecientes con movimiento continuo.* De esta forma la noción original y su accesoria pueden conectarse y formar la proposición sintética siguiente: *Todo lo que es capaz de aumentar o disminuir es descrito con movimiento continuo.*

Esta última reformulación es una unificación o *síntesis* del pensamiento newtoniano con el pensamiento clásico de su época, a la que se pudo remontar gracias a la trascendencia o universalidad de la noción de espacio; particularmente a su atributo más representativo, la noción de cantidad. Con este primer axioma Newton fue capaz en 1665-66 de dar una explicación matemática, a partir de las series que surgen del teorema binomio, de los fenómenos físicos y astronómicos que estudió, y considerarle eje medular de la estructura de los *Principia.* No obstante, con la síntesis no se pretendía resolver problemas particulares, sino, en principio, ordenar la totalidad de la ciencia en un sistema textual. Quien desconozca la obra de Newton tiene en ese primer axioma un argumento fundamental para estudiarle.

Síntesis y sintetizadores

En este contexto, y siguiendo el modelo de sintetización de Newton, la cantidad se ancló como noción de orden cuyas posibilidades de implicación rebasaron a cualquier otro concepto, llevando a los analistas y geómetras a escribir bajo esa perspectiva las primeras *Obras de conocimientos avanzados*. En el caso de L´ Hôpital, arrogando del cálculo de Leibniz, transfirió en 1696, (*Vid.* L´ Hôpital, 1696), la noción de cantidad extrapolándole del espacio como *porciones infinitamente pequeñas de cantidades variables que aumentan y disminuyen continuamente.* Esta síntesis fue definida *diferencia* y es el fundamento que permea el *Analyse des infiniment petits*. Euler hizo algo semejante en 1755 para escribir los *Principes de calcul différentiel*, extendió la noción de cantidad al infinito percibiéndole en una sola proposición como: *Las cantidades pueden por su propia naturaleza aumentar o disminuir al infinito* (*Cfr.* Euler, 1755).

Dicha práctica, aunque parezca, no se refiere solamente al diseño de obras de conocimientos avanzados que tengan que ver con el cálculo diferencial. Lobatchevski construyó su *Géométrie imaginaire* con argumentos semejantes. Pascal expresó que la geometría tomaba su fundamento a partir de generalizar la noción de extensión en términos de establecer sus límites entre la *nada* o sea el cero, y el infinito. Laplace hizo uso del *principio de la razón suficiente*, de Leibniz, axioma evidente *a priori,* basado en el principio de que *una cosa no puede comenzar a existir sin una causa que le produzca*. Hecho empírico que le llevó a sustentar los *Essai philosophique sur les probabilités,* considerando el estado actual del universo como el efecto del estado anterior y como la causa del que ha de seguirle.

En Descartes, durante el siglo XVII, los principios que se exigían para fundamentar la ciencia en documentos textuales debieran ser *evidencias apodícticas*, es decir, axiomas convincentes *a priori* que de principio no admitieran contradicción. Este último acuñó la noción de *elemento*, como aquellos componentes inmanentes de una cosa. Si seguimos este punto de vista, en L´ Hôpital la *diferencia* es el elemento constitutivo y es el resultado *formal* de la síntesis de pensamientos. En Newton los elementos serían las *primeras y últimas razones de cantidades* llamadas inicialmente *fluxiones*, o mejor aún en el contexto de la síntesis, *velocidades de crecimiento*.

Vista así, la unificación de conocimientos conduce por sí misma a la adquisición de un conocimiento nuevo. Kant llamó en 1785 *proposiciones sintéticas* a la suma de las proposiciones primitiva y su accesoria. El ejemplo clásico kantiano es el de la proposición sintética 7+5=12; fue comentada en (De Rémusat, 1849; Russell, 1950 y Meyerson y Lefebvre 1969). En el centro de la proposición ni el concepto de 5, ni el concepto de 7, indican que su suma sea divisible por 3 y 4. Con ello Kant, Rémusat y Meyerson concluyeron en la síntesis afirmando que *ahí se ha creado algo nuevo.* Otro ejemplo cotidiano, de entre muchos otros, fue el de: *la línea recta es la más corta entre dos puntos.* Evidentemente el sujeto *recta* no está comprendido en el atributo, este último, *la más corta entre dos puntos,* es la proposición accesoria que sintetiza la primera.

Hasta aquí hemos podido bosquejar como la síntesis fundó una tradición en la construcción de obras de ciencias sujeta a los siguientes argumentos: 1) La unificación de pensamientos, 2) La definición proposicional del elemento, y 3) La consagración de la obra. ¿Pero qué alcance tuvieron esas perspectivas en el diseño de los manuales?

La unificación en los manuales para la enseñanza

Desde principios del siglo XVIII los elementos se concebían como *aquella parte que denotaba las componentes originales de un cuerpo.* Reynaud, en su texto de cálculo llamado *Analyse demontrée*, (*Vid.* Reynaud, 1708) y Bèzout en sus *Principios de cálculo infinitesimal* de mediados del siglo XVIII (*Cfr.* Bèzout, 1760 aprox.), llamaban *elemento* a la extensión infinitesimal o diferencial que se tomaba en las figuras geométricas con las cuales es posible determinar la cantidad de área, longitud o volumen correspondiente. En este sentido el diferencial de área dA, es un *elemento* distintivo que unifica y hereda sus fundamentos al área total.

El *hecho analítico* en el *Traité du calcul différentiel et integral* de S. F Lacroix

En la escritura del *Traité du calcul différentiel et integral*, por cantidad Lacroix había concebido todo aquello *cuya magnitud por su naturaleza es comparable con otra de su misma especie* (*Cfr.* Lacroix, 1797). La comparación sólo era posible, como en Newton, con el auxilio de los números, y se lograba a partir de establecer la dependencia entre cantidades.

Para justificar el paso de las cantidades en juego por sus diferentes estados de magnitud, sean estos infinitamente pequeños o infinitos, Lacroix hubo de reducir esta operación a un *hecho analítico* reposado sobre nociones consistentes que esperaba llegaran a responder a las aplicaciones geométricas de la mecánica, asignatura central en la enseñanza de la é*cole polytechnique* al iniciar funciones en 1794, y de la cual el cálculo infinitesimal era parte fundamental. El *hecho analítico* fue su intento por sintetizar el concepto de límite newtoniano para con ello tener un argumento o proposición medular en el diseño del *Traité*.

La posición de Lacroix hacia el concepto de límite se colocaba en la postura en esa dirección de los escritos de Euler, D´Alembert y Cousin y era totalmente opuesta a la de Lagrange, incluyendo su negación a la notación propuesta por este último. Dos problemas sirvieron para la justificación, aquel de las tangentes analizado algebraicamente por Barrow, y la caída de los cuerpos graves tomado de la experiencia de Galileo.

La transparencia del objetivo era dejar ver que ambos problemas, resueltos en su momento sin la concepción de los límites, son consustanciales con éste. Ello probaría el origen apodíctico del concepto a partir de unificar las concepciones de Barrow y Galileo con las propias ideas que Lacroix tenía del concepto de límite.

Para el efecto hizo uso del método de reducción al absurdo, o sea, no suponer aquello que se encuentra en la proposición inicial, dejando ver que ello surge natural, en este caso el concepto de límite (*Vid.* Lacroix, 1819, *nota A* al final de la obra).

El problema de las tangentes de Barrow

En el problema de las tangentes de Barrow, inició con la parábola ordinaria $y^2 = px$. Cortándole con una secante hizo: AP=*x,* PM=*y,* PP´=*h*,M´Q=*k*, A´P=*x+h,* P´M=*y+k*. Comparando los triángulos semejantes M´Q: MQ :: PM: PS, es decir *k: h :: y:* PS, llegó a la expresión PS=P $y\frac{h}{k}$. Desarrollando $(y+k)^2 = p(x+h)$, y restándole la primitiva $y^2 = px$, le quedó: $2yk+k^2 = ph$, de donde resulta el cociente $\frac{h}{k} = \frac{2y+k}{p}$. Sustituyendo esta última en: PS=P $y\frac{h}{k}$, llegó a: PS= $\frac{2y^2}{p} + k\frac{y}{p}$, la cual es llamada *subsecante.*

Para hacer ver que en esta parte del problema el concepto de límite aparece, el argumento de Lacroix fue el siguiente: *Una primera observación se ofrece, es esta que, a pesar del evanecimiento de las cantidades h, k, la fracción que sugiere su relación continua existiendo; o bien tiene un valor apreciable, o ella se reduce a* $\frac{2y}{p}$*, valor donde la cantidad* PS= $\frac{2y^2}{p} + k\frac{y}{p}$*, se aproxima a medida a medida que k disminuye, y donde ella puede diferir tan poco como queramos.*

La fracción $\frac{2y}{p}$, muestra la existencia del límite en la variación de la expresión original.

La proposición, o *elemento* final de esta argumentación, fue colocada por Lacroix en las *Notions préliminaires* del *Traité*, como una definición en los siguientes términos: *Así, luego que las variaciones respectivas* *de una función y su variable se envanecen, esto no ocurre con su relación; la cual tiende hacia un límite aproximándose a él por diversos grados, existiendo, entre este límite y la función, una dependencia mutua quien determina a una por la otra* (*Vid.* Lacroix, 1819, en *premiére partie de calcul différentiel*)

A partir de este argumento le fue expedito ir formulando la estructura proposicional del *Traité.* Como es el caso del ejemplo siguiente: (Sea) $u = ax^2$*, pongamos x+h en lugar de x, quedando* $u' = ax^2 + 2axh + ah^2$*, y restando la primera ecuación de la segunda* $u' - u = 2axh + ah^2$ *, dividiendo los dos miembros por h, se tiene* $\frac{u'-u}{h} = 2ax + ah$*, hasta aquí la relación de variación de la función y de la variable es compuesta de dos partes. Una depende del valor particular de la variación, y la otra es afecta por h. Si concebimos que esta última cantidad disminuya, el resultado se aproximará sin cesar a 2ax y sólo le alcanzará suponiendo h=0; de suerte que 2ax es el límite de la relación* $\frac{u'-u}{h}$ *, es decir el valor hacia el cual esta relación tiende a medida que la cantidad h disminuye, y a la que se puede aproximar tanto como se quiera.*

No obstante, aun cuando Lacroix sólo afirmaba que *h, k* son pequeñas, el orden en que Barrow les estimó fue viéndoles como infinitamente pequeños. Barrow tomaba la hipotenusa del triángulo que asumen estos valores como un arco infinitamente pequeño, que más tarde se llamaría *triángulo característico*, y desarrolló el mismo trabajo que Lacroix para evanecer *h* y *k* ; pero es obvio que en los cocientes que resultan del proceso, y por el contexto infinitesimalista a que se sujeta, se encuentra implícita la derivada como pendiente de la recta tangente, trabajo que no convence, en tanto desear ver el resultado como anterior a cualquier hipótesis posterior al concepto de límite. Lacroix debió pensar en esta ambigüedad al proponer el ejemplo de la *caída libre de los cuerpos.*

La *caída de los cuerpos graves* de Galileo

El argumento de Galileo, es decir que *los cuerpos recorren espacios cada vez más grandes en intervalos de tiempo iguales,* en virtud de la gravedad que actúa sobre ellos, fue usada por Lacroix para determinar el paso al límite. Designó por *h* la altura que recorre el cuerpo desde el inicio de su movimiento hasta su caída. Representó por 1 (uno) el espacio recorrido en el primer segundo, en el 2º 3, en el 3º 5 y así sucesivamente.

Estimó la gravedad como constante, llamó a ésta *fuerza de impulsión* designándole como $\frac{1}{m}$, la cual fue tomada como unidad de tiempo. Consecuentemente el cuerpo recibiría *m* de tales acciones donde los efectos, *que se asumen los unos a los otros,* le imprimirían al término de ese tiempo una velocidad total *p.*

Luego, la velocidad que resulta de una sola acción es $\frac{p}{m}$; así, durante la fracción $\frac{t}{m}$, el cuerpo no recorrerá más que el espacio $p\frac{1}{m}$, (dado que $d = vt$). Considerando los intervalos consecutivos: $0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \frac{3}{m}, \ldots, \frac{n}{m}$, se tiene que para las acciones que ejerce la fuerza *p* al inicio de cada intervalo: $0, \frac{p}{m}, \frac{2p}{m}, \frac{3p}{m}, \ldots, \frac{np}{m}$. Y para todos los espacios recorridos al final de los mismos intervalos: $0, \frac{p}{m^2}, \frac{2p}{m^2}, \frac{3p}{m^2}, \ldots, \frac{np}{m^2}$.

De aquí que la suma de todos los espacios nos debe dar el espacio total recorrido por el cuerpo, quedando: $h = 0 + \frac{p}{m^2} + \frac{2p}{m^2} + \frac{3p}{m^2} + \ldots + \frac{np}{m^2}$. O sea: $h = \frac{p}{m^2}\frac{n(n+1)}{2}$. O bien: $\frac{p}{2}(\frac{n}{m^2} + \frac{n^2}{m^2})$. Más, considerando que un número cualquiera de *t* segundos, contiene un número *mt* de intervalos iguales a $\frac{t^2}{m}$, y haciendo $n = mt$, a efecto de aplicar el límite, quedará: $\frac{p}{2}(\frac{mt}{m^2}+\frac{m^2t^2}{m^2})$. Es decir: $\frac{pt}{2}(\frac{1}{m}+t)$.

El concepto de límite

Con este resultado Lacroix reivindicó su idea. La aplicación del límite es de una naturaleza distinta al problema de las tangentes; este involucra al infinito, y su solución da lugar para que exponga, incluso, una primer noción o elemento *del principio de transición o continuidad: Vemos que entre más aumentamos m, las acciones de la fuerza se reaproximan, en tanto la cantidad* $(\frac{1}{m}+t)$ *difiere de t, y que ella misma subsiste luego que se anula la fracción* $\frac{1}{m}$*, esto aniquila el intervalo supuesto entre dos acciones sucesivas de la fuerza. Este estado de cosas es el límite hacia el cual tiende sin cesar la sucesión de movimiento considerada arriba; y por consecuencia es la acción continua de la fuerza, el espacio recorrido es* $\frac{1}{2}pt^2$.

El paso al límite *aniquila* el intervalo supuesto entre dos acciones sucesivas, las cuales, haciéndose evanecer, dan por resultado que haya continuidad. De aquí que la existencia del intervalo sólo haya sido única en su género, como una cantidad auxiliar, y haya servido de puente para determinar $\frac{1}{2}pt^2$. Esta última expresión relaciona a *h* y *k*, es sólo así que se puede llegar a ella, *sugiriéndole, no por su relación, más por su límite.*

La *metafísica* que precede, sugerida a partir de los ejemplos en la *nota A* indicada al final de la obra, pareciera suficiente en lo que concierne a su *filosofía* del cálculo diferencial, tanto en lo geométrico como en el movimiento de los cuerpos, a partir de que en ambos casos las funciones correspondientes a las cantidades son susceptibles de límites y consecuentemente sus puntos capaces de ser unidos por la ley de continuidad, para justificar en ese contexto la escritura del *Traité*.

Los *Principios Matemáticos* de D. Benito Bails

Antes que Lacroix, el geómetra español B. Bails escribió entre 1772-76 sus *Principios matemáticos*, sistema compilado de conocimientos científicos redactado en diez tomos que se utilizaría para la enseñanza tanto en los colegios militares españoles, así como desde la apertura del Seminario de Minería mexicano a principios de 1792. Compendiado en cuatro tomos en 1790 los *Principios* contenían, para el tomo I aritmética y geometría, el tomo II involucra álgebra, secciones cónicas, series, cálculo diferencial y cálculo integral; el tomo III sitúa dinámica, estática, hidrodinámica, óptica, y astronomía; finalmente el tomo IV principios de geografía, gnomónica, arquitectura, arquitectura civil, arquitectura hidráulica, perspectiva y tablas de logaritmos. El objetivo de la escritura obedecía a la búsqueda de generalizar los conocimientos planteándolos de manera concisa y tratando de abordar los más posibles.

Por su evidencia, Bails concebía la matemática de su época como un gran axioma *a priori*, previendo que éstas, dentro del mundo real, no tenían la necesidad de una justificación de sus principios elementales (*Cfr.* Bails, 1790). En ese sentido, la síntesis asumida por Bails manipula el espacio como una extensión finita, al estilo de Newton, desprendiéndole de los límites que la ciñen y dejando a la contingencia la dimensión del espacio infinito: (...) *sólo por este medio podemos formar conceptos de una extensión, duración, &, infinita.*

La manipulación del infinito

La extensión infinita es un espacio geométrico que tiene por límites al infinito. Término potencial al que podemos encaminarnos *sin alcanzarle jamás*. Puesto que a los matemáticos de su época no les interesaba tanto verificar la existencia en la naturaleza de cantidades infinitas que puedan existir: (...) *esto no tiene que ver con el infinito matemático, el cual no es más que el límite de lo finito, de cuyo límite no necesita el matemático suponer su existencia, le basta que lo finito nunca llegue a alcanzarle.*

La manera de probar esta proposición la dio Bails a partir de determinar la suma de una sucesión infinita de términos, en la forma: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32},$ &. Dado que es una sucesión decreciente y *continuada al infinito*, su último término, o sea el límite, será infinitamente pequeño y nulo: *pues la última de estas muchas cantidades finitas que todas van menguando, infinitas en número, ha de ser infinitamente menos que la primera, o nula.* La diferencia entre la primera de las cantidades y la última es *nula*, de manera que al cabo de que sea menor que cualquier cantidad apreciable, las cantidades sean por último iguales, versión de las *primeras y últimas razones* de Newton: *Puesto que si no fueran iguales, se podría señalar su diferencia ó su diferencia será una cantidad señalable, cuya consecuencia repugna con el supuesto.*

De aquí Bails desprendió las siguientes conclusiones involucrando en el contexto cantidades diferenciales:

Si x es finita, es lo mismo que x+dx. Porque dx es la diferencia finita de x, cuya diferencia ha menguado hasta ser menor que toda cantidad señalable.

Que siendo x infinita, y $\frac{a}{b}$, cuando *b* va *menguando* hasta hacerse nulo. Veamos el argumento: *Sea* $\frac{a}{b} = q$*, de modo que b exprese el cociente de a partido por b; claro está que cuando más mengue b, tanto mayor será q, el grado máximo de decremento á que puede llegar b es o* (cero)*, luego* $\frac{a}{0}$ *es el límite de todos los incrementos de q.*

La justificación es que, conforme *b* crece se va acercando al grado máximo de sus incrementos, es decir llegaría al límite de sus aumentos, el cual nunca podrá alcanzar ya que dejaría de ser una cantidad.

Lo que resta es establecer una proposición que de nombre o defina la unificación: *Este límite de los aumentos es lo que los matemáticos llaman el infinito, cuya expresión es* $\frac{a}{0}$*, y* ∞ *el signo con el que le señalan.*

Dicho resultado $\frac{a}{0} = \infty$, *cuando x mengua,* es pedestre en el sentido de su cercanía con la forma de sintetizar el espacio. Curiosamente una cantidad que va decreciendo y tiene por límite al cero, al llegar a éste deja de ser cantidad, en ese sentido nunca llega. Luego para Bails, ni el infinito ni el cero son cantidades, son límites geográficos a los cuales las cantidades se pueden acercar sin llegar a ellos.

Las justificaciones hacia la sintetización de Bails toman sentido por el consenso en que la comunidad de matemáticos de mediados del siglo XVIII habían concebido las magnitudes infinitas, es decir *como el límite de lo finito.* El propio D´Alembert en 1759, aseguraba que el concepto de número infinito no existía: *No es más que una idea abstracta, que sugiere solamente un límite intelectual, al cual todo número finito no llega jamás* (*Cfr.* D´Alembert, 1759, pp. 239 a 244).

De ello se resumía que el carácter metafísico que presentaba el límite infinito era, a los ojos de la matemática, *poco exacto.* No obstante:*debe verse como maneras abreviadas de sugerirle, que los matemáticos han inventado para enunciar una verdad.*

Ante esto, D´Alembert propuso su propia definición, la cual es aproximada y rectifica a la de Bails: *Decimos que una magnitud es el límite de otra magnitud, cuando la segunda puede aproximarse de la primera tanto como una magnitud dada, por pequeña que esta pueda suponerse, en tanto que la magnitud que se aproxima, pueda jamás sobre pasar la magnitud a la que se aproxima, de modo que la diferencia de semejante cantidad y su límite sea absolutamente indistinguible.*

No obstante, si bien Bails justifica la sintetización a través del concepto de límite, el cual *frena* a este último evitando la contingencia, no le presenta como una herramienta metodológica que sirva para deducir las proposiciones del cálculo infinitesimal en el texto. Bails supone la noción de límite como sujeta o intrínseca al *último de los aumentos dx*, sin asumirle o siquiera mencionarlo en las demostraciones. Véase por ejemplo el caso de la proposición 521: *Sea* $y = x^2$ *; pongamos x+dx en lugar de x, de lo que saldrá* $y' = x^2 + 2xdx + dx^2$*; luego* $y' - y = dy = x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2 = 2xdx + dx^2$ *, luego* $d(x^2) = 2xdx + dx^2$. *Pero* $2xdx : dx^2 :: 2x : dx$*, luego el término* dx^2 *es infinitamente menor que 2xdx, luego puede ó debe desecharse, luego finalmente* $d(x^2) = 2xdx$.

Los *Elementos de Análisis Trascendente* de F. Díaz Covarrubias

En el año de 1873, aparecieron en México *Los elementos de análisis trascendente* del ingeniero mexicano Francisco Díaz Covarrubias, el texto fue preparado para su uso en la *segunda clase de matemáticas* al iniciar funciones la Escuela Nacional Preparatoria en 1868.

En el texto, Díaz Covarrubias usa el término *variable* en lugar de *cantidad* y consideraba las funciones en la misma categoría de las variables. Como en el caso de Lacroix, Díaz Covarrubias no dudó al expresar el término *cantidad* por el de *variable*. Todavía en su época las cantidades denotaban variables, en tanto eran vistas como *aquello que aumenta o disminuye*. Para la enseñanza del Cálculo en la preparatoria, haría una reformulación de carácter geométrico más accesible para los alumnos.

Los cambios de dirección

Aprovechando la coyuntura de la representación gráfica de las funciones, dada en la definición de función, estableció un argumento geométrico y mecánico, perceptible fácilmente para el lector debido al movimiento que se impone a un punto generador de la propia trayectoria que dibuja la curva: *Toda línea curva puede suponerse originada por el movimiento de un punto que varía continuamente de dirección según cierta ley, que dependerá de la naturaleza de la curva. El punto que la describe se llama generador de la curva. De este modo de concebir la generación de estas líneas se infiere que si bien el cambio de dirección del punto generador es necesariamente diverso de una curva a otra, todas ellas tienen por propiedad común la variabilidad de esa dirección.* (Díaz Covarrubias F, 1873, p. 17, art. 10)

Los *cambios de dirección* por los que pasa el *punto generador* sobre la curva, tienen sentido en lo discreto y sobre una sucesión poligonal de líneas rectas, de lados muy pequeños, no infinitesimales, que le configuran y que tienen por propiedad la *variabilidad* de sus diversas direcciones. Empero, la concepción elemental de la variabilidad del generador sobre las líneas rectas puede llevarse todavía más allá. En forma discreta, dice Díaz Covarrubias: *Admitamos* (...) *que al llegar el generador a determinado punto de su curso, cese la causa que hace variar su dirección de acuerdo con la ley propia de la curva* (...) *sin que a pesar de esto se paralice su movimiento. El generador seguirá moviéndose en la dirección que tenía en ese punto de su trayecto, y describirá por tanto, la recta tangente a la curva en ese mismo punto.*

Pasar de ese estado concreto de las líneas rectas en la construcción gráfica de la curva a su estado continuo, es como pasar del estado constante al estado variable. Realizar esa transición lleva a introducir en los cálculos ciertas *cantidades auxiliares*, *con el fin de facilitar el establecimiento de las ecuaciones entre los diversos elementos de una cuestión,* con lo cual se matematiza la concepción geométrica. ¿Más qué significa esto último?

Esta idea concibe la curvatura de la curva como la representación de la variabilidad de las direcciones, y la recta tangente como la dirección del generador en el punto de contacto; generaliza la sustitución de líneas rectas por líneas curvas; es sencilla, afirma el autor: *por introducir la noción de constancia en lugar de otra más compleja, cual es la variabilidad*. Empero, con ello es posible deducir esta última y pasar al estado continuo.

La justificación hacia la enseñanza es que la noción de constancia es fácilmente adoptada por los jóvenes a diferencia de la complejidad de la *variabilidad*, puesto que: *No hacemos más que obedecer a una necesidad imperiosa del espíritu humano, nacida de la estrechez natural de nuestra inteligencia. Este gran artificio (...) nos induce espontáneamente a estudiar las direcciones curvilíneas, representantes de la idea de variabilidad, por medio de su comparación con las rectilíneas, imágenes geométricas las mas naturales de las noción de constancia".* (*Ibid,* p. 72, c V)

De aquí surgen otras preguntas ¿cómo se transita del estado constante al continuo? y ¿cómo se incorporan estas ideas en el ambiente algebraico y algorítmico?

La noción de constancia

En un primer momento, el de las *consideraciones puramente geométricas*, Díaz Covarrubias pretendía que los estudiantes preparatorianos se apropiaran del conocimiento a partir de solamente nociones concretas, como la de *constancia*, de suerte que, en lo abstracto, ello les de ideas generales para entender la variabilidad de los fenómenos, y en consecuencia el estado continuo de éstos. Empero, la clave de los argumentos se centran en el entendimiento algebraico de la noción de variabilidad.

Puesto que en lo concreto la curvatura es definida a través de la representación rectilínea de los cambios de dirección del generador; en lo continuo, las variables son *cantidades susceptibles de adquirir ciertos valores*. Una variación determinada de una cierta cantidad en posición geométrica -a través de sus coordenadas- es definida como *una diferencia entre dos estados de magnitud de la misma cantidad*. La sucesión de tales posiciones o cambios de estado, suministran la forma de la curva al presuponerle continua. Pero tal *continuidad*, afirma Díaz Covarrubias: *No puede admitirse más que como una verdad subjetiva, e imposible de realizarse objetivamente; pues por muy próximos entre sí que se supongan los valores asignados a las variables x e y, nunca producirán más que una serie de puntos, tan inmediatos unos a otros como se quiera, pero que jamás determinarán rigurosamente una curva continua.*

Además, la continuidad debe potenciarse a partir de la variabilidad de las funciones: (No) *enlazadas por valores proporcionalmente variables en lo abstracto, o por rectas en lo concreto;* (sino)*, las posiciones que estas determinan, se las debe suponer unidas por valores o por líneas sujetos unos a otras a la ley de variabilidad de la función misma.*

Lo rectilíneo, en este sentido, se asume a la variabilidad, así como ésta última a la continuidad. La continuidad de las curvas se establece a partir de la contigüidad o vecindad de dos estados geométricamente separados sin importar tanto la magnitud de la separación, y sí la variación que ocurre en dicha separación a la cantidad.

Pasar al estudio de la variabilidad de su entendimiento geométrico a su concepción algebraica o analítica, sólo es posible a partir de involucrar en ese estado *magnitudes auxiliares* que lleven a su definición analítica.

Las magnitudes auxiliares

El argumento de *cantidades auxiliares,* planteado inicialmente como una necesidad por Díaz Covarrubias, deviene al establecido por Comte en la *Philosophia Mathématique* (*Cfr.* Camacho, A, 2000). Incorporó a los *Elementos* la proposición comtiana percibiéndole así: *El análisis llamado trascendente o infinitesimal tiene por objeto introducir en los cálculos ciertas cantidades auxiliares, con el fin de facilitar el establecimiento de las ecuaciones entre los diversos elementos de una cuestión, dando enseguida métodos para eliminar las auxiliares, a fin de obtener las relaciones que se buscan entre las cantidades principales del problema* (Díaz Covarrubias, 1873, *op, cit*, p. 19).

La introducción de *cantidades auxiliares* en los cálculos algebraicos, como *h* en el caso de Comte en las ecuaciones de la forma $y = f(x)$, hacen que surjan las propias *funciones derivadas* propuestas por Lagrange en la serie: $f(x+h) = f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + etc.$

Por *ofrecer grandes dificultades en su aplicación* (...) *y presentar el análisis como una simple extensión del álgebra,* Díaz Covarrubias no recurrió -como Comte- a la utilidad o aplicación de la notación de las *derivadas,* como $f'(x)$, del cálculo de Lagrange. Asumió la serie y el modelo lagrangiano vía el razonamiento geométrico de Fermat donde la recta secante tiende a la tangente al hacer variar el punto donde la secante corta a la curva hasta la coincidencia o punto común de ambas. Llegó a esta serie determinando la cotangente del ángulo en dirección de la secante respecto del eje de las ordenadas y del triángulo rectángulo, no infinitesimal, formado geométricamente por los cambios de estado y la secante: *cot. T=* $\frac{y'-y}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Despejando y' y haciendo expansión en serie de $f(x+h)$, obtuvo: $y' = f(x+h) = f(x) + Ah + Bh^2 + Ch^3 + \ldots$

O bien, haciendo $y = f(x)$ y volviendo al esquema original se tiene la diferencia entre los estados de magnitud: $\frac{y'-y}{h} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = A + Bh + Ch^2 + \ldots$

De esta última *A, B. C, etc.*, fueron denominados al estilo de Leibniz, como ya mencionamos, *coeficientes diferenciales*. Los coeficientes diferenciales de la serie forman parte en lo analítico de la variabilidad del punto generador esquematizado en lo geométrico. Son nuevas funciones de la variable *x* y adquieren diversos valores de un punto a otro de la curva: *Representan la ley según la cual varían las cotangentes trigonométricas de las direcciones en que se va colocando el punto generador al describir el lugar geométrico primitivo* (*Ibid*, p. 28, c. II).

La síntesis de Díaz Covarrubias

A pesar de que los resultados variacionales en la serie son los mismos que en Lagrange, la naturaleza del incremento *h* difiere en ambos. Para Lagrange y Comte, ésta es una cantidad cuya naturaleza destacaba por carácter geométrico dado a la recta tangente: *Es una recta tal que entre ella y la curva no puede pasar otra en su punto común de contacto.* Para Díaz Covarrubias la declaración de *h* como magnitud auxiliar, constante, era indistinta de la determinación de la variabilidad de la función $f(x)$; genéricamente *h* podía tomar cualquier acepción numérica y de todas formas pasar al estado continuo. Es esta su pretendida síntesis.

Por conveniencia, y sujetándose a la tendencia de la época, Díaz Covarrubias asumió la notación leibniciana al despejar el valor de *A* en la serie, es decir: $A = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + P(h)$. En la que $P(h) = Bh + Ch^2 + Dh^3 + etc.$, *lo cual no revierte importancia*. Haciendo *h=0* y definiendo *A* como $\frac{dy}{dx}$, estableció: $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. En este contexto el cociente de diferenciales no envolvía en su modelo de cálculo idea alguna de determinada magnitud, puesto que *dy y dx*, *pueden ser tan grandes o tan pequeñas como se quiera, con tal que guarden entre sí la relación:* $\frac{dy}{dx} = \cot.\mathrm{T}$.

De esta forma, la auxiliar *A* asume el valor del cociente de diferenciales para pasar al estado continuo. Es decir, $A = \frac{dy}{dx}$. Si ello es cierto, entonces la función $y = c + ax^n$, tendrá por cociente de diferenciales a nax^{n-1}. Lo cual es patente en su desarrollo algebraico:

$$y' = c + ax^n + nax^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}ax^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2\cdot 3}ax^{n-3}h^3 + \ldots,$$

Como resultado de la síntesis anterior estableció la proposición para encontrar la diferencial de cualquier tipo de funciones: *La diferencial de una función es igual a su coeficiente diferencial, multiplicado por la diferencial de la variable*.

Para deslindarse de Lagrange, analizó los coeficientes diferenciales -en el mejor de los casos el primero de ellos- en lugar de las *derivadas* e incrementos de las funciones. En la parte analítica del modelo de Díaz Covarrubias, la variabilidad de la función incrementada surge independientemente de la *constancia* de la magnitud *h*. Para el autor es indistinto utilizar la función tangente como análoga al coeficiente diferencial, en su lugar utilizó la cotangente. La síntesis importante de su modelo se centra en la naturaleza de la auxiliar *h*, puesto que como constante se contrapone a los modelos infinitesimalistas contemporáneos al suyo.

La posición de G. Barreda

En su *Examen del Cálculo Infinitesimal,* G. Barreda*,* creador de la Escuela Nacional Preparatoria, sabio y filósofo, criticó profusamente las posturas filosóficas tomadas hacia el modelo de cálculo lagrangiano por Comte y Díaz Covarrubias (*Vid.* Barreda, G, 1908). Su punto de vista era que: *El carácter excepcional dado por estos últimos al artificio lógico en la introducción de las cantidades auxiliares, es hacer creer que es exclusivo del cálculo diferencial*. Lo cual resulta *un grave inconveniente* para toda pretendida fundamentación filosófica de esta disciplina.

Desde su punto de vista las magnitudes auxiliares sólo desempeñan un papel transitorio. Su esencia consiste en sustituir estos elementos *en lugar del todo*, con el objeto de inferir sus propiedades: *Sólo sirven para encontrar la ecuación que se busca, pero no deben formar parte de ella* (*Ibid*, p. 20).

A partir de estas reflexiones asumió una posición positivista hacia el sistema leibniciano del que hizo una defensa a través de las ideas conceptuales imbuidas en las *verdades necesarias* de la *Logique* de Stuart Mill (*Cfr.* Mill, J. S, 1866).

En el centro de estas ideas se coloca el siguiente párrafo del que Barreda se plegó para discernir y reflexionar sobre los fundamentos del cálculo infinitesimal: *El carácter asignado a las verdades matemáticas, y particularmente la certeza que les atribuimos, se conserva solamente suponiendo que esas verdades se relacionan con los objetos y sus propiedades, aunque objetos puramente imaginarios*. (*Ibid*, p. 255).

A partir de ello Barreda apuntaría: *Si se quita a los teoremas ese carácter hipotético, si se supone que ellos representan verdades absolutas y aplicables exactamente y sin restricción a la práctica, entonces dichos teoremas, lejos de deber presentarse como el tipo de la verdad y de la exactitud, no serían sino una colección de errores y de delirios* (Barreda, *op, cit,* p. 31).

Para Barreda y Mill la precisión exacta entre los fenómenos físicos y su idealización no existe, de aquí que sólo sea posible inferir hacia ellos a partir de las hipótesis de las que se parte. Hipótesis -como es de suponer- alejadas de la certeza matemática, pero cercanas a la realidad física: *La geometría infinitesimal; no aspira a otra certeza más que a la inferencia; ella no pretende que sus resultados hayan de tenerse como verdades absolutas, ni mucho menos como la expresión fiel y exacta de los hechos reales; lo único que exige, es que esos resultados a los que llega, sean tenidos como consecuencias legítimas de las premisas hipotéticas de que parte* (*Ibid,* p. 31).

El reducir la geometría trascendente a sólo operaciones algebraicas -como en Díaz Covarrubias y Lagrange- *resulta completamente falso*. La inducción no puede ser evadida por un sucedáneo de naturaleza absoluta; puesto que esta metodología juega aquí un papel determinante y es que *la inteligencia no tiene otro procedimiento para pasar* de un medio parcial a otro global. ¿De dónde?, se pregunta Barreda, ¿las cantidades de radicales imaginarios? O ¿por qué inferimos expresiones no conocidas como *a*=0X¥, o 1=0X¥, etc.?

Expresiones absurdas como éstas son el resultado de una generalización hecha a través de operaciones conocidas de los números reales. Leibniz, como Barreda, hacía ver que la matemática se encontraba *llena de tales enigmas,* que surgen a través del *análisis* e impactan en la *síntesis*. Es decir son el resultado de despreciar las cantidades infinitesimales en las series y analizar el conjunto de lo que ello deja: (...) *el único modo de salir de este resultado de pura aproximación, progresiva pero indefinida, es elevarse, luego que la ley de la serie se deja ver con toda claridad, por medio de una síntesis a la consideración de la totalidad de los términos de la progresión* (...)

La síntesis de Barreda

La síntesis para esta generalización tiene que ver con una ley de causación general planteada por Stuart Mill y pragmatizada por Barreda. La ley, llamada por Mill de las *variaciones concomitantes* (Mill, *op, cit,* p. 442), se refería a la relación de dependencia entre la variación de dos fenómenos; de suerte que a una variación, causa en el primero, ocurre un efecto o *causación* en el segundo. Si se tiene un fenómeno *A*, el cual produce un evento *a*; se sigue que para cada variación en las diferentes relaciones de *A*, siempre ocurre una variación en la cantidad *a.*

Barreda hizo distinción de esta ley para determinar el valor al que tiende -disminuyendo incesantemente- la función $\frac{a}{x}$; a medida que *x*, se va acercando a cero: *Si suponemos:* $\frac{a}{x}$*, de manera que x vaya disminuyendo incesantemente,* $\frac{a}{x}$ *irá creciendo en proporción a medida que x, se vaya acercando a 0. De esta constante relación entre la disminución de x y el aumento de* $\frac{a}{x}$*, inferimos por inducción de variaciones concomitantes, que si x llegara a igualarse con 0, o si tocase su límite, como se dice,* $\frac{a}{x}$ *sería=¥* (Barreda, *op, cit,* p. 54).

Tal es la unificación, expuesta en forma de definición, que Barreda propuso para justificar el cálculo de Leibniz a partir de la ley de las variaciones concomitantes. Su argumento final tenía que ver con aquellas proporciones que al diferir en una cantidad infinitesimal entre ellas, se aproximan simultáneamente a sus límites: *dos magnitudes, cuya diferencia puede disminuirse hasta ser menor que cualquier cantidad dada, son rigurosamente iguales*.

Esta concepción -congénita con la definición newtoniana del método llamado de las *primeras y últimas razones*- es un modelo en el que la aproximación, en tanto la ley de *variaciones concomitantes*, vía la inducción, persuade al calculista para llegar al límite.

El convencimiento inmediato en el investigador depende de sus concepciones hacia el fenómeno, y a la certeza de las verdades matemáticas involucradas inicialmente al *análisis*. De aquí la inferencia hacia el límite.

En resumen, Barreda tomó para sí una postura en extremo empirista y encuadrada en la citada obra de Mill. Sus resultados, y propuesta de fundamentación del cálculo infinitesimal leibniciano, cobran sentido por el método de la inducción y deducción a través del germen variacional contenido en la naturaleza de los fenómenos físicos que con el modelo de las variaciones concomitantes de Mill pueden ser analizados; en la extrema importancia dada a la inducción, en tanto método científico -o positivo- que parte de la observación y experimentación y que permite racionalmente al espíritu llegar al conocimiento de la verdad; en el abandono oportuno del *análisis* para pasar a la inferencia y a la consideración, tanto en lo concreto y abstracto, de que *dos magnitudes cuya diferencia puede disminuirse hasta ser cualquier cantidad dada, son rigurosamente iguales*.

Pero el modelo de Cálculo de Barreda es riguroso por los argumentos que incorpora y no es fácilmente asequible a la enseñanza preparatoria de su época.

El debate Díaz Covarrubias-Barreda

Semejante a la concepción actual, la propuesta infinitesimalista de Barreda sólo se acepta en la práctica al entenderse como un modelo de aproximación hacia la cantidad que la función tiene por límite: *Las justificaciones* *de este género, asegura Díaz Covarrubias, tienden a dar al análisis el carácter de un método de pura aproximación, y las que están fundadas en la noción de infinito lo cubren casi con un manto sobrenatural* (...)” (1).

Para reafirmar la fortaleza del carácter de las magnitudes auxiliares en su modelo, y respondiendo a Barreda, Díaz Covarrubias planteó un par de ejemplos sencillos que involucran cantidades físicas y en los que el objetivo es precisar en la *auxiliar*, pues tiene que ver con las magnitudes involucradas cuando se viaja en ferrocarril, en tanto que el segundo adolece de esquema geométrico alguno, es el caso de los réditos que produce un capital a un interés *r* por ciento en un tiempo dado.

En el primer problema dice: *Supongamos que su velocidad* -del ferrocarril- *es de 50 Km. -por hora-, nadie entiende qué se quiso afirmar que después de transcurrida la hora la locomotiva habrá conducido a los viajeros precisamente esa distancia* (...) *lo que todos comprenden es que si las condiciones de la máquina, las de la vía y cuando se tienda a modificar la velocidad, se hicieran constantes, desde el momento de su apreciación, se recorrería aquella distancia al cabo de una hora*.

Las diversas posiciones que asume la velocidad del ferrocarril dependen, desde luego, de los tiempos respectivos en que la locomotora acelera, se hace constante y desacelera.

De esta manera, la ubicación total de la velocidad no puede representarse a partir de una sola posición de la curva: *La forma de esta curva, cuya ecuación es* $e = f(t)$*, será próximamente la que indica la figura* (...) *pequeña aunque creciente en las inmediaciones del origen del tiempo, y decreciente en su fin B, cuando se haya recorrido el espacio BC comprendido entre las dos estaciones*.

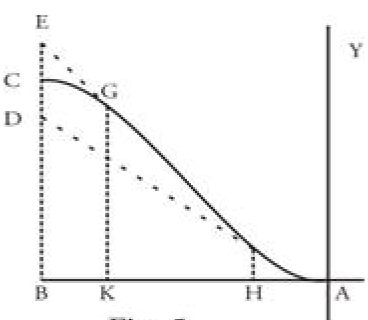

Fig. 5

Desde el momento en que el tren adquiere su velocidad habitual, hasta el (momento) *en que comienza a disminuirla para detenerse en la segunda estación, la curva ofrecerá a una parte FG casi rectilínea*”. (Díaz Covarrubias, *op, cit*, p. 79)

El intento de Díaz Covarrubias es hacer patente el artificio espontáneo con que nuestra cognición recurre a la noción de constancia para apreciar en un punto dado la variación de un fenómeno. Este recurso le supone innato en el ser humano a partir de considerarnos capaces de reducir los fenómenos a eventos más sencillos o discretos para su estudio. En el caso del ejemplo, a pesar de que se supone la velocidad del ferrocarril como una constante, las singularidades que le llevan a tal estado dejan ver que su variabiliadad sólo puede ser concebida a partir de ellas. Estos detalles finos de los fenómenos físicos no pueden ser apreciados por una formulación general de los mismos.

En el segundo ejemplo, consideró que el rédito producido en *n* unidades de tiempo está dado por la expresión: $R = C(cn + an^2)$ cuya variabilidad es supuestamente continua a partir de los atributos del fenómeno. En este caso, la noción de constancia es presente para cualquier valor determinado en *n*. Para obtener la variación de la razón del rédito con respecto al tiempo bastará, con su método, sustituir en *R, n+h* unidades en lugar de *n*, determinar la ecuación que contiene las variaciones, hacer la diferencia de estados de ambos réditos para las *h* unidades de tiempo y elegir la primera auxiliar. Es decir, considerando que la ecuación de variaciones es: $R(n+h)=C(cn+an^2+(2an+c)h+ah^2)$. Y la diferencia de estados de los réditos: $\frac{R'-R}{h}=C(2an+c+ah)$. Elegimos de esta última la auxiliar o primer coeficiente diferencial que es el que nos interesa. Luego: $\frac{R'-R}{h}=C(2an+c)$.

Relación que indica el aumento del capital y por consiguiente el del rédito durante un determinado número de unidades. Esta nueva función es en realidad un producto, en el sentido del aumento de capital que se genera, de modo que le podemos denotar como: $p=C(c+2an)$:*Vemos que por este razonamiento, independiente de toda consideración geométrica, hemos llegado al mismo resultado que si hubiéramos diferenciado a R con relación a n en la ecuación primitiva; pero la supresión del término ah no se ha hecho porque se considere h infinitamente pequeño, ni tampoco porque el valor restante* $C(c+2an)$ *se suponga el límite de la razón entre el producto y el tiempo, o porque sea la derivada de la función primitiva; sino simplemente porque su conservación en el resultado desnaturalizaría el objeto de la cuestión, que es el de calcular el producto del capital con respecto del tiempo en un momento dado, o de manera más general, el de medir en determinado instante la variabilidad de un fenómeno* (*Ibid,* p. 71)

Al definir la función producto como: $p=C(c+2an)$ se hace innecesario el cociente de diferenciales $\frac{dR}{dn}$. La forma o propiedades que este producto hereda de la función primitiva no varían porque la magnitud *h* le quede asociado -nos referimos a la *desnaturalización* que menciona Díaz Covarrubias. En la práctica, ello es posible si se consideran para su análisis separadamente cada uno de los sumandos o coeficientes que integran la serie: $\frac{R'-R}{h}=C(2an+c+ah)$. Viéndose la auxiliar *C(2an+c)* como una clara proporción entre los elementos del problema y prescindiendo, en caso necesario, de aquellos de cualquier grado en *h*, no para envanecerles o aplicarles un límite, sino por su inutilidad práctica dentro del problema real o físico.

Tomar del esquema variacional de la serie el o los coeficientes diferenciales cuyo análisis nos lleve a la solución del problema real sin considerar *h*.

Algunos resultados

Con su curso de cálculo para la preparatoria, Díaz Covarrubias fundó claramente una tradición que señala la existencia de métodos y estilos para la matematización de los fenómenos físicos y de la elementarización de conocimientos que repercutiría en los diseños de otras obras que alternativamente se escribirían para la enseñanza de este nivel. Este modelo adquiere importancia por su incorporación como parte de la enseñanza de la ingeniería y toma un sentido diferente respecto de los modelos infinitesimalistas contemporáneos que se dedicaron a la enseñanza de la matemática.

El entendimiento del concepto de variación es fundado sobre consideraciones geométricas elementales. La geometría es la parte de la matemática que en principio matematiza la extensión de los fenómenos físicos en movimiento a partir de nociones generales constantes como son volúmenes, áreas, ángulos, distancias y puntos: *Mi manera de concebir y plantear los principios del análisis trascendente* (...) *no es más que la expresión de un artificio racional y espontáneo a que recurre nuestra inteligencia siempre que intentamos valorizar, en determinado punto de su producción, un fenómeno variable* (Díaz Covarrubias, *op, cit,* p. 73)

Por otra parte, la crítica de Barreda hacia la propuesta de Díaz Covarrubias, fue la de mostrar con el método positivo la falta de precisión matemática en la definición de las reglas del Cálculo establecidas por el segundo. El intento de Barreda fue un síntoma con el que se buscó una posición de rigor matemático a partir de su intento por sintetizar el infinito, dispuesta para defender y reconstruir el cálculo leibniciano, para así garantizar su fundamentación.

Juicios opuestos, el de Díaz Covarrubias y Barreda, entre la sencillez del primero y el rigor impuesto por el segundo, tenían como finalidad común no sólo la preocupación de la sintetización de sus respectivos discursos sino, también, la previsión del aprendizaje de los conceptos del cálculo por parte de sus alumnos. Empero, la distancia conceptual que separa ambos acercamientos deja ver el inicio de los problemas epistemológicos que hoy nos preocupan en la enseñanza de ésta disciplina.

Conclusiones

Ir a los elementos del conocimiento a partir de unificar o sintetizar, consistía en enlazar el conocimiento anterior con el pensamiento que resultaba de geometrizar el espacio. En la práctica procedimental al geómetra le bastaba con unas cuantas observaciones, relativamente sencillas, como el movimiento de los astros, para sentar las bases empíricas suficientes para la elaboración de reglas, definiciones y hasta teorías.

En sentido contrario a la rectificación de la proto-ciencia de Rashed, donde la ciencia actual debe marcar su orden o principio, la síntesis del espacio formula el pensamiento resultante como un sistema estructurado de obras textuales, cuya unidad proposicional rebasa al conjunto. Epistemológicamente las rupturas y discontinuidades son mínimas, el pensamiento antiguo tiene por plataforma el pensamiento del geómetra, el cual sirve de puente a la continuidad del conocimiento nuevo.

En resumen, la trascendencia de los resultados anteriores tanto en Lacroix, Bails, Díaz Covarrubias, etc., constituyeron *sistemas sintéticos* integrados en corpus de conocimiento que matematizaban toda la ciencia de las épocas referidas. En este sentido, un sistema sintético hace referencia a un conjunto ordenado y coherente de conocimientos constituido en un corpus textual, en el cual los conocimientos y el sistema son integrados a partir de un primer axioma o principio que les organiza y, como vimos, les es común; además, el conocimiento y el sistema debían pretender ser objetivos y corresponder a la realidad de su objeto, es decir la verdad.

Luego, el trabajo previo al diseño de un sistema textual refiere a una *lógica trascendental* que se dividía en dos partes: 1º La enfocada a los problemas concernientes a la unificación de conocimientos a través de establecer la verdad de la primera proposición, y 2º Aquella avocada a la sistematización de los conocimientos en la obra a partir de la primera proposición en la forma de: *definiciones, problemas, corolarios, postulados, lemas, escolios, casos, pruebas, hipótesis, tesis,* etc.

Nota

(1) Este apartado se justifica por el análisis que hace Díaz Covarrubias a la propuesta de Barreda a la que dedica los artículos 58 y 59, páginas 64 a 60, concluye así: Tal es el resumen que da el Sr. Barreda de los fundamentos del método leibnitciano. Su respuesta se coloca en los artículos 60 y 61 páginas 68 a 73 capítulo V llamado Breve exposición comparativa de las diversas concepciones fundamentales que han servido de base al Análisis Trascendente, en Díaz Covarrubias (1873).

Bibliografía

BACHELARD, G. 1971. *Épistémologie*. Paris: Presses Universitaires de France.

BARREDA, G. 1908. *Examen del Cálculo Infinitesimal bajo el punto de vista lógico.* 3ª edición de la Revista Positiva. México: Tipografía Económica.

BAILS, B. 1792. *Principios matemáticos* de la Real Academia de San Fernando, segunda edición. Madrid. Imprenta de la Viuda de Ibarra.

BELHOSTE, G., DALMEDICO, A. D, *et, al.* 1994. *La formation polytechnicienne 1794-1994*. Paris: Dunod.

BÈZOUT, E. 1760 (aprox.). 1999. *Cálculo infinitesimal.* Noriega-Limusa. De la colección de Textos Politécnicos. México: IPN.

BRUNSCHVICG, L. 1922 (1986). *Les étapes de la philosophie mathématique.* De la edición de A. Blanchard. París.

CAMACHO, A. 2000. *Difusión de conocimientos matemáticos a los colegios mexicanos del siglo XIX. De la noción de cantidad al concepto de límite.* Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

CAMACHO, A. 2002. "Los elementos de análisis trascendente de Francisco Díaz Covarrubias. Debate en México (1870) por los fundamentos del cálculo infinitesimal. Entre la sencillez y el rigor". *Revista Paradigma.* Universidad Pedagógica Experimental Libertador. Instituto Pedagógico de Maracay. Centro de Información y Documentación. CIDIPMAR, Venezuela, Volumen XXIII, No 2, pp. 123 a 156.

COMTE, A. 1830. *Cours de Philosophie Positive*, 6 tomos. Paris: Au Siège de la Société Positiviste.

DALMEDICO, A. D. 1993. *Mathématisations, Augustin-Louis Cauchy et l´École française*. Paris: Dunod.

D´ALEMBERT. 1759. *Sur les principes métaphysiques du calcul infinitesimal.* Paris.

DÍAZ COVARRUBIAS, F. 1873. *Elementos de Análisis Trascendente o Cálculo Infinitesimal*. 1ª edición. México: F. R Castañeda y L. G Rodríguez, Impresores.

DE RÉMUSAT, Ch. 1842. *Essais de philosophie*. Paris: Librairie Philosophique de Ladrange.

EULER, L. 1755. *Institutiones calculi diffrentialis.* Saint-Petésbourg.

KANT, E. 1785 (1993). *The critique of practical reason, fundamental principles of metaphysics of moral, and introduction to the metaphysics of ethics, whit a note and conscience.* Chicago: Great Books of the Western World.

LACROIX, S. F. 1797. *Traité du calcul différéntiel et integral.* Paris: Courcier.

LACROIX, S. F. 1819. *Traité elementaire du calcul différéntiel et de calcul integral*. Paris: Bachelier-Courcier.

LAPLACE, P. S. 1845. *Essai philosophique sur les probabilités* En http://gallica.bnf.fr

LEFEBVRE, H. 1969. *Logique formelle, logique dialectique.* Paris: Éditions anthropos.

L´ HÔPITAL. 1696 (1988). *Analyse des infiniment petits pour l´intelligence de lignes courbes.* París: De la edición de A. Blanchard.

MILL, J. S. 1866. *Systeme de Logique déductive et inductive, exposé des principes de la preuve et des méthodes de recherche scientifique*. Traduit sur la sixiéme édition anglaise, deux tomes. Paris: Libraire Philosophique de Ladrange.

NEWTON, I. 1723. *Analysis per quantitatum. Series, Fluxiones ac Diffrentias: cum enumeratione linearum*. Tertii Ordinis. Amstælodami, Sumptibus Societatis.

NEWTON, I. 1685 (1993). *Mathematical principles of natural philosophy.* Chicago: Great Books of the Western World.

PASCAL, B. 1845. *Pensées.* Paris: Charpentier. Librairie-Éditeur.

RASHED, R. 2001 (2003). "Histoire des sciences et diversité au debut du XXIe siècle". Conferencia Inaugural publicada en *Science and Cultural Diversity*. Proceedings of the XXIst International Congress of History of Science. UNAM-Sociedad Mexicana de Historia de la Ciencia, vol. I.

REYNAUD. 1708. *Analyse demontrée.* Paris: De la edición de A. Blanchard.

SHUBRING, G. 1987. *On the methodology of analyzing historical textbooks. Lacroix as textbooks author* .For the Learning of Mathematics. Publishing Association. Montreal, Quebec.

Recibido el 11 Jun 2004